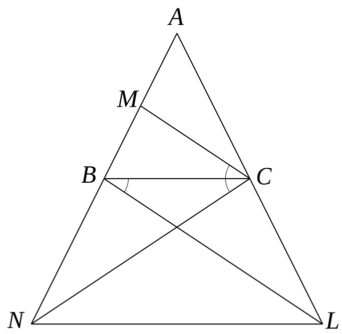
2008年京大理甲$\boxed{3}$文$\boxed{2}$共通

（解答1）



右図の通り、ACの延長上にも、$AL:LC=2:1$となるように、点Lをとる。

対称性から、$AB:BN=1:1$であり、$AC:CL=1:1$である。

$AM:MB=1:1$であるから、$MC \parallel BL$である。

したがって、$\angle BCM=\angle CBL$がわかる。

対称性から$\angle BCN=\angle CBL$であるから　$\therefore \angle BCM=\angle BCN$　（証明終）

（解答2）

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ である。$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=l,\ \angle BAC=\theta$ とすると

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{4}l^2-l^2\cos\theta+l^2=\left(\frac{5}{4}-\cos\theta\right)l^2$$

$$\left|\overrightarrow{CN}\right|^2=4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=4l^2-4l^2\cos\theta+l^2=(5-4\cos\theta)l^2$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{CN}\right|^2=4\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 \qquad \therefore \left|\overrightarrow{CN}\right|=2\left|\overrightarrow{CM}\right|$$

したがって、$MB:BN=CM:CN=1:2$ であるから　$\therefore \angle BCM=\angle BCN$　（証明終）

2008 年京大理乙 $\boxed{3}$

O を通る 4 直線の方向ベクトルを、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする。

これらのうち、どの 3 つも同一平面上になく、一次独立であるから、$\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ と表せる。

4 直線と O 以外で交差する平面の各交点を、$\overrightarrow{OA} = s\vec{a}, \overrightarrow{OB} = t\vec{b}, \overrightarrow{OC} = u\vec{c}, \overrightarrow{OD} = v\vec{d}$ とおく。

このとき、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ となることがあるか、調べる。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -s\vec{a} + t\vec{b}$ ——① $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = pv\vec{a} + qv\vec{b} + (rv - u)\vec{c}$ ——②

ベクトルの一意性より、①と②の係数を比較すると

$s = -pv$ ——③ $t = qv$ ——④ $u = rv$ ——⑤

0 ではない実数 v を適当にとったとき、③、④、⑤によって s, t, u を定めれば、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ が成立する。

このとき、4 点 A, B, C, D は同一平面上にあり、なおかつ四角形 $ABDC$ は平行四辺形である。

以上により示された。（証明終）