2008年京大理甲 $\boxed{6}$

$O'\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$とすると、$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$で$S$を切った切り口は、$O'$を中心とした半径$\dfrac{1}{2}$の円である。

$\angle AO'B=\dfrac{\pi}{3}$であるから　$\therefore l_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

一方、$OA=OB=1$であり、3点$O,\ A,\ B$でSを切った切り口は、Oを中心とした半径1の円である。

$\angle AOB=\theta$とすると　$\cos\theta=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{8}$　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$としてよく、$l_2=\theta$であるから

$l_1>l_2$であるとき　$\dfrac{\pi}{6}>\theta$　$\cos\dfrac{\pi}{6}<\cos\theta$　$\dfrac{7}{8}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{49}{64}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{49-48}{64}=\dfrac{1}{64}>0$であるから　$\dfrac{49}{64}>\dfrac{3}{4}$　$\therefore\dfrac{7}{8}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

確かに成立するので、$l_1>l_2$が示された。（証明終）

2008年京大理乙 $\boxed{6}$

地球の半径を R 、地球の中心を原点 O とし、赤道は xy 平面内にあるとする。

このとき、北緯 $60°$ 地点の z 座標は、 $R\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ である。

$O'\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$ とすると、 $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ で地球を切った切り口は、O' を中心とした半径 $\dfrac{R}{2}$ の円である。

$\angle AO'B = 60°$ であり、ラジアンに換算すると $\dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\therefore R_1 = \dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}R$

一方、 $OA = OB = R$ であり、3 点 $O,\ A,\ B$ で S を切った切り口は、 O を中心とした半径 R の円である。

$\angle AOB = \theta$ とすると、 $AB = \dfrac{R}{2}$ より　$\cos\theta = \dfrac{R^2 + R^2 - \dfrac{R^2}{4}}{2\cdot R\cdot R} = \dfrac{7}{8} = 0.875$

三角関数表より $28.5° < \theta < 29.0°$ であり、ラジアンに換算すると $\dfrac{28.5}{180}\pi < \theta < \dfrac{29}{180}\pi$ であるから

$\therefore \dfrac{28.5}{180}\pi R < R_2 < \dfrac{29}{180}\pi R$　　$R_1 = \dfrac{\pi}{6}R$ より　$\therefore \dfrac{R_2}{R_1} < \dfrac{29}{180}\cdot 6 = \dfrac{29}{30} = 0.966\cdots$

したがって、 R_2 は R_1 より 3% 以上短い。（証明終）

（注）

当時の問題冊子には、$0.0°$ から $90.0°$ までの正弦・余弦・正接の値が、$0.5°$ 刻みで掲載されていた。

$\cos 28.5° = 0.8788,\ \cos 29.0° = 0.8746$ である。

$\angle AOB$ の正弦を求めると $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるが、計算が面倒になる。