2009年京大文 $\boxed{2}$

$$\int_0^x f(y)dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy=\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 y f(y)dy+\int_0^1 y^2 f(y)dy=x^2+C$$

$p=\int_0^1 f(y)dy,\ q=\int_0^1 y f(y)dy,\ r=\int_0^1 y^2 f(y)dy$ とおくと $\int_0^x f(y)dy+px^2+2qx+r=x^2+C$

両辺を x で微分すると $f(x)+2px+2q=2x$ $\therefore f(x)=-2(p-1)x-2q$

$f(x)$ の次数は1以下であるから、改めて $f(x)=ax+b$ とおくと、左辺は

$$\int_0^x (ay+b)dy+x^2\int_0^1 (ay+b)dy+2x\int_0^1 (ay^2+y)dy+\int_0^1 (ay^3+by^2)dy$$

$$=\left[\frac{a}{2}y^2+by\right]_0^x+x^2\left[\frac{a}{2}y^2+by\right]_0^1+2x\left[\frac{a}{3}y^3+\frac{b}{2}y^2\right]_0^1+\left[\frac{a}{4}y^4+\frac{b}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+\left(\frac{a}{2}+b\right)x^2+\left(\frac{2}{3}a+b\right)x+\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=(a+b)x^2+\left(\frac{2}{3}a+2b\right)x+\frac{a}{4}+\frac{b}{3}$$

これが x^2+C に等しいから

$a+b=1$ ——① $\frac{2}{3}a+2b=0$ ——② $C=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}$ ——③

①、②より $a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ ③より $C=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

以上により $\therefore f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2},\ C=\frac{5}{24}$ ……(答)