2009年京大文 $\boxed{4}$

$\angle AOB=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $OA=x$, $OB=y$ とする。

点 C は、OB に関して点 A と対称であり、点 D は、OC に関して点 B と対称であり、
点 E は、OD に関して点 C と対称である。
$\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\theta$ であるから、$\angle BOE=3\theta$ である。

$OA=OC=OE=x$ より、△OBE の面積は　$S_2=\dfrac{1}{2}xy|\sin 3\theta|$

△OAB の面積は、$S_1=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$ であり、$S_1:S_2=2:3$ であるから

$\sin\theta:|\sin 3\theta|=2:3$　　$2|\sin 3\theta|=3\sin\theta$

$|\sin 3\theta|=|\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta|=|\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)|=|3\sin\theta-4\sin^3\theta|=\sin\theta|3-4\sin^2\theta|$

これより　$2\sin\theta|3-4\sin^2\theta|=3\sin\theta$　　$|3-4\sin^2\theta|=\dfrac{3}{2}$　　$3-4\sin^2\theta=\pm\dfrac{3}{2}$

$3-4\sin^2\theta=\dfrac{3}{2}$ のとき　$3-4\sin^2\theta>0$ より　$\sin^2\theta<\dfrac{3}{4}$　$0<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ――①

$\sin^2\theta=\dfrac{3}{8}$ より　$\therefore\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}<\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より、①を満たす。

$3-4\sin^2\theta=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$\sin^2\theta=\dfrac{9}{8}>1$ となり、不適。

以上により　$\therefore\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　……(答)