2009年京大理甲$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

$n=1$のとき　pは素数であるから、$p!$がpで割り切れる回数は1回。

$n \geqq 2$のとき

p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、

pの倍数は、$p,\ 2p,\ \cdots,\ (p^{n-1}-1)p,\ p^n$の$p^{n-1}$個。

p^2の倍数は、$p^2,\ 2p^2,\ \cdots,\ (p^{n-2}-1)p^2,\ p^n$の$p^{n-2}$個。

以下同様に、$p^k\ (1 \leqq k \leqq n)$の倍数はp^{n-k}個である。

p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、

pの倍数であるが、p^2の倍数ではないものの個数は　$p^{n-1}-p^{n-2}$

p^2の倍数であるが、p^3の倍数ではないものの個数は　$p^{n-2}-p^{n-3}$

以下同様に、$p^k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$の倍数であるが、$p^{k+1}$の倍数ではないものの個数は　$p^{n-k}-p^{n-k-1}$

p^nの倍数は、p^nのみで、1個。

p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、

素因数pをちょうどk個$(1 \leqq k \leqq n-1)$持つものの個数は、$p^{n-k}-p^{n-k-1}$で与えられる。

$(p^n)!$がpで割り切れる回数は、$(p^n)!$に含まれる素因数pの個数に等しいから、求める回数は

$$
\begin{aligned}
&1\times(p^{n-1}-p^{n-2})+2\times(p^{n-2}-p^{n-3})+3\times(p^{n-3}-p^{n-4})+\cdots+(n-2)\times(p^2-p)+(n-1)\times(p-1)+n \\
&\quad = p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p^2+p+1=\frac{p^n-1}{p-1} \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

これは$n=1$でも成立する。