2009年京大理甲 $\boxed{1}$

問1

$\overrightarrow{OE}=(3,\ 0,\ a),\ \overrightarrow{OG}=(0,\ 2,\ a)$ とすると　$\overrightarrow{OE}\times\overrightarrow{OG}=(-2a,\ -3a,\ 6)$

3点 $O,\ E,\ G$ を含む平面に垂直なベクトルの1つは、$\vec{k}=(2a,\ 3a,\ -6)$ であるから、

$D(0,\ 0,\ a)$ を通り、$\vec{k}$ に平行な直線上の点は、$\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2a\\3a\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2at\\3at\\a-6t\end{pmatrix}$ とおける。

これが BC 上にあるとき　$0\leqq 2at\leqq 3$ ——①　$3at=2$ ——②　$a-6t=0$ ——③

②より、$at=\dfrac{2}{3}$ であるから、$2at=\dfrac{4}{3}$ であり、①を満たす。③より $t=\dfrac{a}{6}$ であるから　$\dfrac{a^2}{6}=\dfrac{2}{3}$　$a^2=4$

$a>0$ より　$\therefore a=2$ ……(答)　P の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ 2,\ 0\right)$ ……(答)

問2

$1\leqq k\leqq n$ とする。k 回目の試行を行う前、袋には、白玉2個、赤玉 k 個が入っている。

k 回目の試行において、玉の取り出し方は ${}_{k+2}C_2=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$ 通りで、成功する取り出し方は1通り。

$1\leqq k\leqq n-1$ のとき、k 回目の試行で失敗する確率は、余事象より

$$1-\frac{2}{(k+2)(k+1)}=\frac{(k+2)(k+1)-2}{(k+2)(k+1)}=\frac{k^2+3k}{(k+2)(k+1)}=\frac{k(k+3)}{(k+2)(k+1)}$$

$n-1$ 回目まで失敗する確率は　$\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 2}\cdot\dfrac{2\cdot 5}{4\cdot 3}\cdot\dfrac{3\cdot 6}{5\cdot 4}\cdots\cdots\dfrac{(n-1)(n+2)}{(n+1)n}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n+2}{n}$

k 回目の試行で成功する確率は、$\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$ であるから、求める確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{3n(n+1)}$$ ……(答)

2009年京大理乙 $\boxed{1}$

$P(3,\ 0,\ 4s),\ Q(0,\ 2,\ 4t)$ と表せる。

$\overrightarrow{OP}=(3,\ 0,\ 4s),\ \overrightarrow{OQ}=(0,\ 2,\ 4t)$ とすると　$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}=2(-4s,\ -6t,\ 3)$

3点 $O,\ P,\ Q$ を含む平面に垂直なベクトルの1つは、$\vec{k}=(4s,\ 6t,\ -3)$ であるから、

$D(0,\ 0,\ 4)$ を通り、$\vec{k}$ に平行な直線上の点 R は、$\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}4s\\6t\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4su\\6tu\\4-3u\end{pmatrix}$ とおける。

AC 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は、$2x+3y=6,\ 0\leqq x\leqq 3,\ z=0$ を満たす。

R が AC 上にあるとき、$z=0$ より　$4-3u=0$　$\therefore u=\dfrac{4}{3}$

このとき、x 座標 $\dfrac{16}{3}s$、y 座標 $8t$ について　$0\leqq\dfrac{16}{3}s\leqq 3,\ 2\cdot\dfrac{16}{3}s+3\cdot 8t=6$　$0<s\leqq\dfrac{9}{16},\ 16s+36t=9$

$s=\dfrac{9}{16}$ のとき $t=0$ であり、$0<t<1$ より $s=\dfrac{9}{16}$ は除く。

$0<s<\dfrac{9}{16}$ のとき、$0<t<\dfrac{1}{4}$ となるから、$0<s<\dfrac{9}{16}$ のとき、常に $0<t<1$ を満たす。

求める条件は　$\therefore 0<s<\dfrac{9}{16},\ 16s+36t=9$　……(答)