2009年京大理甲 $\boxed{2}$

$\angle A_1OA_2=\theta\ (0<\theta<\pi),\ OA_1=x,\ OA_2=y$ とする。
点 A_{n+2} は、OA_{n+1} に関して点 A_n と対称であるから、$OA_{n+2}=OA_n,\ \angle A_nOA_{n+1}=\angle A_{n+1}OA_{n+2}$ である。

$\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4=\angle A_4OA_5=\theta$ 、$OA_1=OA_3=OA_5=x$ より、△ OA_2A_5 の面積は　$S_2=\dfrac{1}{2}xy\left|\sin 3\theta\right|$

△ OA_1A_2 の面積は、$S_1=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$ であるから、$\left|\sin 3\theta\right|$ が $\sin\theta$ の正の整数倍であればよい。

$$\left|\sin 3\theta\right|=\left|\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta\right|=\left|\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\right|=\left|3\sin\theta-4\sin^3\theta\right|=\sin\theta\left|3-4\sin^2\theta\right|$$

これより、$\left|3-4\sin^2\theta\right|$ が正の整数値をとる。

$3-4\sin^2\theta>0$ のとき　$0<\sin^2\theta<\dfrac{3}{4}$　$0<3-4\sin^2\theta<3$　$\therefore 3-4\sin^2\theta=1,\ 2$

　$3-4\sin^2\theta=1$ のとき　$\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

　$3-4\sin^2\theta=2$ のとき　$\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$3-4\sin^2\theta<0$ のとき　$\dfrac{3}{4}<\sin^2\theta\leqq 1$　$0<4\sin^2\theta-3\leqq 1$　$\therefore 4\sin^2\theta-3=1$

　$\sin^2\theta=1$　$\sin\theta=1$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{2}$

以上により　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$　……(答)

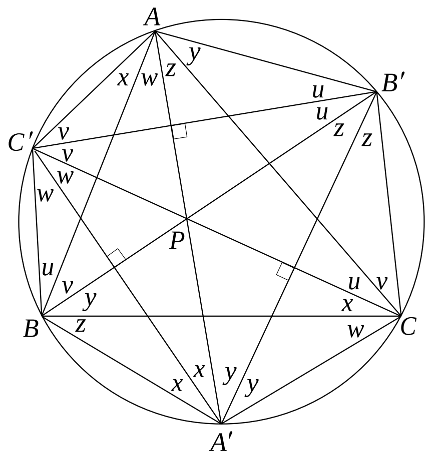
2009年京大理乙 $\boxed{2}$　※2019. 10. 3 十分性の論証を訂正。

（必要性）

A, B, C, A', B', C' が、同一円周上にあるとき、A', B', C' は、△ABC の外接円上にある。

A', B', C' は、それぞれ、BC, CA, AB の垂直二等分線上にあるから、

$A'B = A'C,\ B'C = B'A,\ C'A = C'B$ である。



$B'A = B'P,\ C'A = C'P,\ C'B = C'P,\ A'B = A'P,\ A'C = A'P,\ B'C = B'P$ より、

$B'C', C'A', A'B'$ は、それぞれ PA, PB, PC の垂直二等分線である。

$\angle PB'A = 2u,\ \angle PC'A = 2v,\ \angle PC'B = 2w,$

$\angle PA'B = 2x,\ \angle PA'C = 2y,\ \angle PB'C = 2z$

とおくと

B' は、C, P, A を通る円の中心であるから、円周角の定理より

$\angle PCA = u,\ \angle PAC = z$

C' は、A, P, B を通る円の中心であるから、円周角の定理より

$\angle PBA = v,\ \angle PAB = w$

A' は、B, P, C を通る円の中心であるから、円周角の定理より

$\angle PCB = x,\ \angle PBC = y$

さらに、円周角の定理より

$\angle A'BC = \angle A'B'C = z,\ \angle A'CB = \angle A'C'B = w,\ \angle B'CA = \angle B'C'A = v,\ \angle B'AC = \angle B'A'C = y,$

$\angle C'AB = \angle C'A'B = x,\ \angle C'BA = \angle C'B'A = u$

すると、$A'B = A'C$ より　$\angle A'BC = \angle A'CB$　$\therefore z = w$　$B'C = B'A$ より　$\angle B'CA = \angle B'AC$　$\therefore v = y$

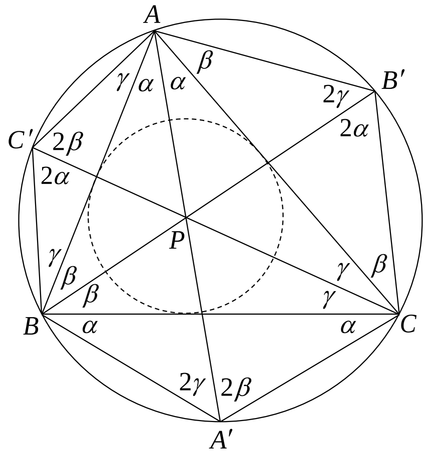
$C'A = C'B$ より　$\angle C'AB = \angle C'BA$　$\therefore x = u$

したがって、$\angle PAB = \angle PAC,\ \angle PBC = \angle PBA,\ \angle PCA = \angle PCB$ であるから、P は△ABC の内心である。

（十分性）

P が△ABC の内心であるとき、$\angle BAA' = \angle CAA' = \alpha,\ \angle CBB' = \angle ABB' = \beta,\ \angle ACC' = \angle BCC' = \gamma$ とする。

このとき、$2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$ である。



A' を中心とし、B, C, P を通る円について、

中心角 $\angle PA'B$ は、円周角 $\angle PCB$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PA'B = 2\gamma$

中心角 $\angle PA'C$ は、円周角 $\angle PBC$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PA'C = 2\beta$

すると、$\angle BAC + \angle BA'C = 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$ であるから、

四角形 $ABA'C$ は、△ABC の外接円に内接している。

すなわち、A' は△ABC の外接円上にある。

同様に、B' を中心とし、C, A, P を通る円について、

中心角 $\angle PB'C$ は、円周角 $\angle PAC$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PB'C = 2\alpha$

中心角 $\angle PB'A$ は、円周角 $\angle PCA$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PB'A = 2\gamma$

すると、$\angle CBA + \angle CB'A = 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$ であるから、

四角形 $CBAB'$ は、△ ABC の外接円に内接している。

すなわち、B' は△ ABC の外接円上にある。

同様に、C' を中心とし、A, B, P を通る円について、

中心角 $\angle PC'A$ は、円周角 $\angle PBA$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PC'A = 2\beta$

中心角 $\angle PC'B$ は、円周角 $\angle PAB$ の 2 倍であるから　$\therefore \angle PC'B = 2\alpha$

すると、$\angle ACB + \angle AC'B = 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$ であるから、

四角形 $ACBC'$ は、△ ABC の外接円に内接している。

すなわち、C' は△ ABC の外接円上にある。

したがって、A, B, C, A', B', C' は、同一円周上にある。

以上により、A, B, C, A', B', C' が、同一円周上にあるための必要十分条件は、P が△ ABC の内心に一致することであることが示された。（証明終）

（注）

A', B', C' は、それぞれ AP, BP, CP の延長上にあることがわかるが、これを前提にしてはならない。