2009年京大理甲$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

$n=1$のとき　pは素数であるから、$p!$がpで割り切れる回数は1回。

$n \geqq 2$のとき
p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、
pの倍数は、$p,\ 2p,\ \cdots,\ (p^{n-1}-1)p,\ p^n$の$p^{n-1}$個。
p^2の倍数は、$p^2,\ 2p^2,\ \cdots,\ (p^{n-2}-1)p^2,\ p^n$の$p^{n-2}$個。
以下同様に、$p^k\ (1 \leqq k \leqq n)$の倍数はp^{n-k}個である。

p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、
pの倍数であるが、p^2の倍数ではないものの個数は　$p^{n-1}-p^{n-2}$
p^2の倍数であるが、p^3の倍数ではないものの個数は　$p^{n-2}-p^{n-3}$
以下同様に、$p^k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$の倍数であるが、$p^{k+1}$の倍数ではないものの個数は　$p^{n-k}-p^{n-k-1}$
p^nの倍数は、p^nのみで、1個。

p^n個の自然数$1,\ 2,\ \cdots,\ p^n-1,\ p^n$のうち、
素因数pをちょうどk個$(1 \leqq k \leqq n-1)$持つものの個数は、$p^{n-k}-p^{n-k-1}$で与えられる。
$(p^n)!$がpで割り切れる回数は、$(p^n)!$に含まれる素因数pの個数に等しいから、求める回数は

$$1\times(p^{n-1}-p^{n-2})+2\times(p^{n-2}-p^{n-3})+3\times(p^{n-3}-p^{n-4})+\cdots+(n-2)\times(p^2-p)+(n-1)\times(p-1)+n$$
$$=p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p^2+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

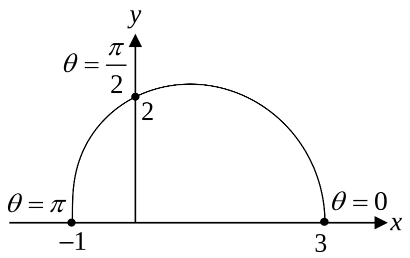
これは$n=1$でも成立する。

2009 年京大理乙 $\boxed{5}$

$$x = r\cos\theta = 2\cos\theta + \cos^2\theta \qquad \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta + 2\cos\theta(-\sin\theta) = -2\sin\theta(1+\cos\theta)$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき、$\sin\theta \geqq 0,\ 1+\cos\theta \geqq 0$ であるから、$\dfrac{dx}{d\theta} \leqq 0$ であり、x は θ に対して単調減少。

$$y = r\sin\theta = (2+\cos\theta)\sin\theta \geqq 0$$



求める体積は

$$V = \pi\int_{-1}^{3} y^2 dx = \pi\int_{\pi}^{0} (2+\cos\theta)^2 \sin^2\theta \cdot \{-2\sin\theta(1+\cos\theta)\} d\theta$$

$$= 2\pi\int_{\pi}^{0} (2+\cos\theta)^2 (1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)(-\sin\theta) d\theta$$

$t = \cos\theta$ とおくと $dt = -\sin\theta d\theta$

$$V = 2\pi\int_{-1}^{1} (2+t)^2 (1-t^2)(1+t) dt = 2\pi\int_{-1}^{1} (4+4t+t^2)(1+t-t^2-t^3) dt$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} (4+4t+t^2+4t+4t^2+t^3-4t^2-4t^3-t^4-4t^3-4t^4-t^5) dt$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} (4+8t+t^2-7t^3-5t^4-t^5) dt = 2\pi\int_{-1}^{1} (4+t^2-5t^4) dt$$

$$= 4\pi\int_{0}^{1} (4+t^2-5t^4) dt = 4\pi\left[4t+\frac{t^3}{3}-t^5\right]_0^1 = 4\pi\left(4+\frac{1}{3}-1\right) = \frac{40}{3}\pi \quad \cdots\cdots (答)$$