2009 年京大理甲 $\boxed{6}$

$$x = r\cos\theta = \cos\theta + \cos^2\theta = \cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} \qquad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - \sin 2\theta$$

$$y = r\sin\theta = \sin\theta + \sin\theta\cos\theta = \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta + \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2 + 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta) = 2 + 2\cos(2\theta - \theta) = 2(1 + \cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

求める長さは

$$\therefore \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 4 \quad \cdots\cdots(答)$$

2009年京大理乙 $\boxed{6}$

(1)

$(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ より　$a_2=a^2+2b^2$

a は奇数であるから、a^2 は奇数。$2b^2$ は偶数であるから、a_2 は奇数である。

一方、$b_2=2ab$ は偶数である。a_2 は2で割り切れない。

a と b は互いに素であるから、a_2 は a の1以外の約数で割り切れず、b の1以外の約数でも割り切れない。

したがって、a_2 と b_2 は互いに素。以上により示された。(証明終)

(2)

$(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ より　$(a+b\sqrt{2})^{n+1}=(a+b\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})=aa_n+2bb_n+(ba_n+ab_n)\sqrt{2}$

これより、以下の漸化式が成り立つ。

$a_{n+1}=aa_n+2bb_n$ ――① $b_{n+1}=ba_n+ab_n$ ――②

①を用い、すべての n について a_n が奇数であることを、数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき成立。$n=k$ のとき、a_k は奇数であると仮定する。

aa_k は奇数であり、$2bb_k$ は偶数であるから、$a_{k+1}=aa_k+2bb_k$ は奇数。

したがって、$n=k+1$ でも成立し、すべての n について、a_n が奇数であることが示された。(証明終)

(後半・解答1)

a_n と b_n が互いに素であるとき、a_{n+1} と b_{n+1} が互いに素であることを示す。

①、②より、a_{n+1} と b_{n+1} が公約数 m を持つとすると、

$aa_{n+1}-2bb_{n+1}=(a^2-2b^2)a_n$ は、m で割り切れる。

$ab_{n+1}-ba_{n+1}=(a^2-2b^2)b_n$ は、m で割り切れる。

a_n と b_n は互いに素であるから、$m>1$ のとき、m は a^2-2b^2 の約数である。

②の両辺に $2b$ をかけると　$2bb_{n+1}=2b^2a_n+2abb_n$

①より、$2bb_n=a_{n+1}-aa_n$、$2bb_{n+1}=a_{n+2}-aa_{n+1}$ であるから、代入すると

$a_{n+2}-aa_{n+1}=2b^2a_n+a(a_{n+1}-aa_n)$　$\therefore a_{n+2}=2aa_{n+1}-(a^2-2b^2)a_n$ ――③

①の両辺に b をかけると　$ba_{n+1}=aba_n+2b^2b_n$

②より、$ba_n=b_{n+1}-ab_n$、$ba_{n+1}=b_{n+2}-ab_{n+1}$ であるから、代入すると

$b_{n+2}-ab_{n+1}=a(b_{n+1}-ab_n)+2b^2b_n$　$\therefore b_{n+2}=2ab_{n+1}-(a^2-2b^2)b_n$ ――④

a^2-2b^2 と a_{n+1} と b_{n+1} が、3以上の公約数 m を持つと仮定する。③、④より、$n\geqq 2$ のとき

$2aa_n=a_{n+1}+(a^2-2b^2)a_{n-1},\ 2ab_n=b_{n+1}+(a^2-2b^2)b_{n-1}$

両式の右辺は m で割り切れるので、$2aa_n$ と $2ab_n$ は、公約数 m を持つが、a_n と b_n が互いに素であるから、

a は m で割り切れる。このとき、a^2-2b^2 は m で割り切れるから、b も m で割り切れる。

ところが、a と b は互いに素であるから、矛盾する。

したがって、a_n と b_n が互いに素であるとき、a_{n+1} と b_{n+1} が互いに素であることが示された。

a_2 と b_2 が互いに素であるから、以降すべての n について、a_n と b_n は互いに素である。(証明終)

（後半・解答 2）

ある $n=N$ において、a_N と b_N は、3 以上の公約数 m を持つと仮定する。

このとき、①、②より、a_{N+1} と b_{N+1} も、公約数 m を持つ。

以下帰納的に、$n \geqq N$ において、a_n と b_n は、公約数 m を持つ。

一方、$(a+b\sqrt{2})^{2k}=(a_k+b_k\sqrt{2})^2=a_k{}^2+2b_k{}^2+2a_kb_k\sqrt{2}$ より、$a_{2k}=a_k{}^2+2b_k{}^2,\ b_{2k}=2a_kb_k$ であるから、

(1) の議論により、a_k と b_k が互いに素であるとき、a_{2k} と b_{2k} が互いに素であることがわかる。

a_1 と b_1、a_2 と b_2 は互いに素であるから、以下帰納的に、$n=2^l$ のとき、a_n と b_n は互いに素である。

ここで、l を大きくしていけば、$2^l \geqq N$ となり、$n \geqq N$ において a_n と b_n が公約数 m を持つことに、矛盾する。

したがって、仮定は誤りであり、すべての n について、a_n と b_n は互いに素である。（証明終）