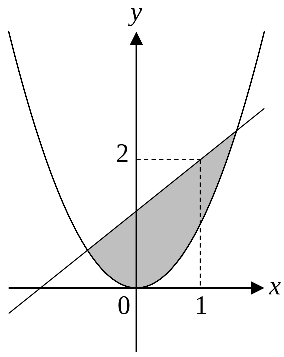
2010年京大文$\boxed{1}$

(1)

点(1, 2)を通り、傾きaの直線は　$y=a(x-1)+2$



$x^2=a(x-1)+2$とすると　$x^2-ax+a-2=0$ ——①

①の2つの実数解を、$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると

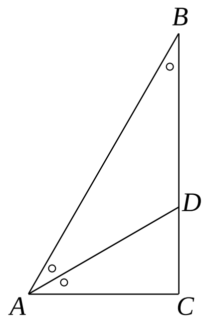
$$S(a)=\int_\alpha^\beta(ax-a+2-x^2)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$
$$=-\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

ここで、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a-2$であるから

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4(a-2)=a^2-4a+8\quad\therefore S(a)=\frac{1}{6}(a^2-4a+8)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(a-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$$

$0\leqq a\leqq 6$より、$S(a)$を最小にするaは　$a=2$ ……(答)

(2)



$AD=BD$より　$\angle DAB=\angle DBA$

$\angle ABC=\angle DAC,\ \angle ACB=\angle DCA$より　$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$

$BD:DC=2:1$より　$DC=\dfrac{1}{3}BC$

$AC:BC=DC:AC$より　$BC\cdot DC=\dfrac{1}{3}BC^2=AC^2=1$　$BC^2=3$　$\therefore BC=\sqrt{3}$

$AB^2=AC^2+BC^2$であるから、$\triangle ABC$は、$\angle ACB$を直角とする直角三角形である。

面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……(答)