2010年京大理甲$\boxed{2}$乙$\boxed{1}$共通

空間座標系において、Aを始点とした位置ベクトルを考えると

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$ ——①

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$より　$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=0$ ——②

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ——③

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}$であるから、$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$であればよい。

$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

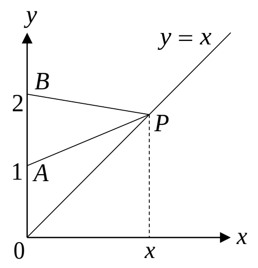
①より$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$、②より$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$、③より$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$であるから

$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$　$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

以上により示された。(証明終)

2010 年京大理甲 $\boxed{3}$ 乙 $\boxed{2}$ 共通

直線 AP 、直線 BP の傾きを、それぞれ $\tan\alpha,\ \tan\beta$ とすると



$$\tan\alpha = \frac{x-1}{x} \qquad \tan\beta = \frac{x-2}{x}$$

$\angle APB = \theta$ とすると、 $\tan\theta = \tan(\alpha-\beta)$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x}}{1+\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}} = \frac{x(x-1)-x(x-2)}{x^2+(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x}{2x^2-3x+2} = \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3}$$

相加平均・相乗平均の関係より

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 2 \quad \text{等号成立は} \quad x=\frac{1}{x} \quad x^2=1 \quad x=1\text{のとき}$$

したがって、 $\tan\theta$ は $x=1$ のとき、最大値 $\frac{1}{2\cdot 2-3}=1$ をとるから、

$\theta = \angle APB$ の最大値は　$\therefore \frac{\pi}{4}$ ……(答)