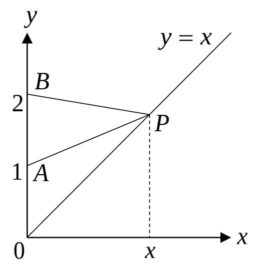
2010年京大理甲$\boxed{3}$乙$\boxed{2}$共通

直線AP、直線BPの傾きを、それぞれ$\tan\alpha,\ \tan\beta$とすると



$$\tan\alpha=\frac{x-1}{x}\qquad \tan\beta=\frac{x-2}{x}$$

$\angle APB=\theta$とすると、$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x-2}{x}}{1+\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}}=\frac{x(x-1)-x(x-2)}{x^2+(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x}{2x^2-3x+2}=\frac{1}{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3}$$

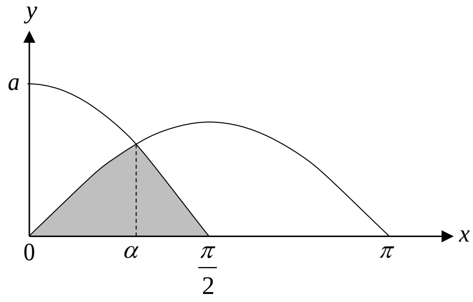
相加平均・相乗平均の関係より

$$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2\quad \text{等号成立は}\quad x=\frac{1}{x}\quad x^2=1\quad x=1\text{のとき}$$

したがって、$\tan\theta$は$x=1$のとき、最大値$\dfrac{1}{2\cdot 2-3}=1$をとるから、

$\theta=\angle APB$の最大値は　$\therefore \dfrac{\pi}{4}$　……(答)

2010年京大理甲$\boxed{5}$乙$\boxed{3}$共通



$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$ より、$T = \dfrac{2}{3}$ である。

$y = \sin x$ と $y = a\cos x$ の交点の x 座標を、$\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$T = \int_0^{\alpha} \sin x dx + a\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\alpha} + a\left[\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1 - \cos\alpha + a(1 - \sin\alpha)$$

$\sin\alpha = a\cos\alpha$ より、$a = \tan\alpha$ であるから

$T = 1 - \cos\alpha + \tan\alpha(1 - \sin\alpha) = \dfrac{2}{3}$ $\quad 3\cos\alpha(1 - \cos\alpha) + 3\sin\alpha(1 - \sin\alpha) = 2\cos\alpha$

$3\sin\alpha + \cos\alpha - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3\sin\alpha + \cos\alpha - 3 = 0$ $\quad \cos\alpha = 3(1 - \sin\alpha)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ に代入して

$\sin^2\alpha + 9(1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha) = 10\sin^2\alpha - 18\sin\alpha + 9 = 1$

$5\sin^2\alpha - 9\sin\alpha + 4 = (5\sin\alpha - 4)(\sin\alpha - 1) = 0$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より $\quad \therefore \sin\alpha = \dfrac{4}{5},\ \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ $\quad$ したがって $\quad \therefore a = \tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ ……(答)