2010年京大理甲 $\boxed{4}$

数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき　$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$　$2a_1 \leqq 0$　$\therefore a_1 \leqq 0$　$0 \leqq a_1$ かつ $a_1 \leqq 0$ であるから　$\therefore a_1 = 0$

したがって、$n=1$ のとき成立。

$n \leqq m$ である正の整数 n について、$a_n = 0$ と仮定する。

$n = m+1$ のとき　$0 \leqq 3a_{m+1} \leqq \sum_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1}$　$2a_{m+1} \leqq 0$　$\therefore a_{m+1} \leqq 0$

$0 \leqq a_{m+1}$ かつ $a_{m+1} \leqq 0$ であるから　$\therefore a_{m+1} = 0$

したがって、$n = m+1$ のときも成立。

以上により、すべての正の整数 n について、$a_n = 0$ が示された。（証明終）

2010年京大理乙 $\boxed{4}$

$\triangle ABC$において、$AB=\sqrt{3},\ BC=a,\ CA=b$とし、外接円の半径が1であるとする。

正弦定理により

$\dfrac{AB}{\sin\angle C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\angle C}=2\cdot 1 \quad \sin\angle C=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \angle C$は鋭角であるから $\quad \angle C=\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{BC}{\sin\angle A}=\dfrac{a}{\sin\angle A}=2 \quad \sin\angle A=\dfrac{a}{2} \quad 1<a<2$ より $\quad \dfrac{1}{2}<\sin\angle A<1 \quad \dfrac{\pi}{6}<\angle A<\dfrac{\pi}{2} \quad \cos\angle A=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$

$\dfrac{CA}{\sin\angle B}=\dfrac{b}{\sin\angle B}=2 \quad \therefore b=2\sin\angle B$

$\angle B=\dfrac{2}{3}\pi-\angle A$であり、$\dfrac{\pi}{6}<\angle A<\dfrac{\pi}{2}$であるから、$\dfrac{\pi}{6}<\angle B<\dfrac{\pi}{2}$であり、$\angle B$は鋭角である。

$$b=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\angle A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos\angle A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin\angle A=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{2}+\sqrt{3\left(1-\frac{a^2}{4}\right)} \quad \cdots\cdots(答)$$

(注)

余弦定理により $\quad AB^2=3=BC^2+CA^2-BC\cdot CA\cdot\cos\angle C=a^2+b^2-2ab\cdot\dfrac{1}{2}=a^2+b^2-ab$

$b^2-ab+a^2-3=0$であるから、bについての2次方程式として解くことも可能。

ただし、$b=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4(a^2-3)}}{2}=\dfrac{a\pm\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$となり、一方は不適であることと、鋭角三角形であることの論証がやや面倒である。