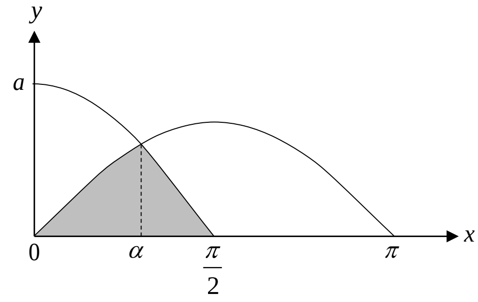
2010年京大理甲$\boxed{5}$乙$\boxed{3}$共通

$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$ より、$T=\dfrac{2}{3}$ である。



$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の交点の x 座標を、$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$T=\int_0^{\alpha}\sin x dx+a\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left[-\cos x\right]_0^{\alpha}+a\left[\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1-\cos\alpha+a(1-\sin\alpha)$$

$\sin\alpha=a\cos\alpha$ より、$a=\tan\alpha$ であるから

$$T=1-\cos\alpha+\tan\alpha(1-\sin\alpha)=\frac{2}{3}\qquad 3\cos\alpha(1-\cos\alpha)+3\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\cos\alpha$$

$$3\sin\alpha+\cos\alpha-3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=3\sin\alpha+\cos\alpha-3=0\qquad \cos\alpha=3(1-\sin\alpha)$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入して

$$\sin^2\alpha+9(1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha)=10\sin^2\alpha-18\sin\alpha+9=1$$
$$5\sin^2\alpha-9\sin\alpha+4=(5\sin\alpha-4)(\sin\alpha-1)=0$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\therefore\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}$　したがって　$\therefore a=\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$　……(答)

2010 年京大理乙 $\boxed{5}$

(1)

$a(n)=2^n$ とする。数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき　$a(1)=2$　$3^2-1=8$ は、$2^3=8$ で割り切れるが、$2^4=16$ では割り切れないから、成立。

$n=k$ のとき　$3^{a(k)}-1=2^{k+2}l$ と仮定する。l は正の奇数とする。

このとき　$3^{a(k+1)}-1=3^{2a(k)}-1=(3^{a(k)}-1)(3^{a(k)}+1)=2^{k+2}l(2^{k+2}l+2)=2^{k+3}l(2^{k+1}l+1)$

$l,\ 2^{k+1}l+1$ は正の奇数であるから、$3^{a(k+1)}-1$ は、2^{k+3} で割り切れるが、2^{k+4} では割り切れない。

したがって、$n=k+1$ でも成立。以上により示された。（証明終）

(2)

$m=2^n p$ とする。n は自然数であり、p は正の奇数である。

$$3^m-1=3^{a(n)p}-1=(3^{a(n)}-1)(3^{a(n)(p-1)}+\cdots+3^{a(n)}+1)$$

ここで、$3^{a(n)}$ は奇数であり、$3^{a(n)q}$ $(0\leqq q\leqq p-1)$ は奇数である。

$3^{a(n)(p-1)}+\cdots+3^{a(n)}+1$ は p 個の奇数の和であり、奇数である。

したがって、3^m-1 が 2^m で割り切れるとき、$3^{a(n)}-1$ が 2^m で割り切れる。

(1) より、$m\leqq n+2$ であるから　$m=2^n p\leqq n+2$　$p\leqq \dfrac{n+2}{2^n}$ ――①

$b_n=\dfrac{n+2}{2^n}$ とすると　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{n+3}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n+2}=\dfrac{n+3}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+4}\leqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}<1$　$\therefore b_n>b_{n+1}$

$b_1=\dfrac{3}{2}$、$b_2=1$ であり、$n\geqq 3$ のとき $b_n\leqq\dfrac{5}{8}<1$ であるから、$n=1,\ 2$ のとき、①を満たす正の奇数 $p=1$ が存在し、$n\geqq 3$ のとき①を満たす正の奇数 p は存在しない。

以上により、$(n,\ p)=(1,1),\ (2,1)$ に限られる。すなわち、$m=2$ か $m=4$ である。（証明終）