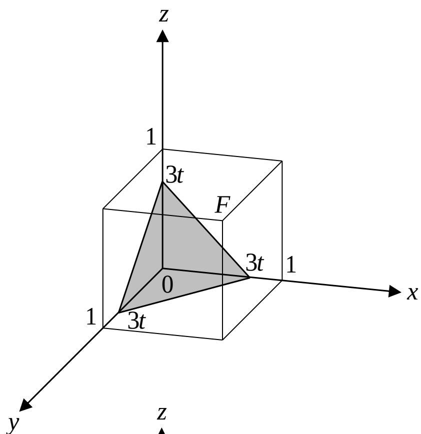
2010年京大理甲 $\boxed{6}$

線分 OF 上の点 $P(t,\ t,\ t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を考える。$OP = \sqrt{3}t$ である。
P を通り、OF に垂直な平面 α の方程式は、$x + y + z = 3t$ で与えられる。

対称性より、$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲で考える。

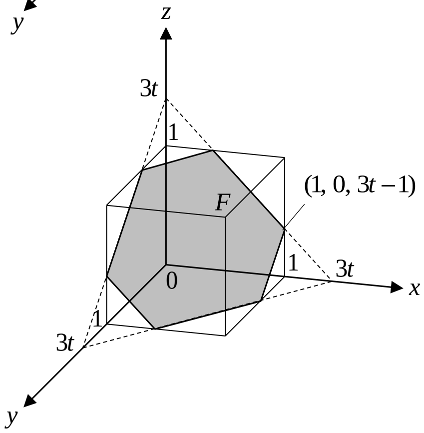


$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

平面 α による立方体の断面は、正三角形になる。

この1つの頂点 $(3t,\ 0,\ 0)$ と、P との距離は　$\sqrt{(3t-t)^2 + t^2 + t^2} = \sqrt{6}t$

平面 α による回転体の断面積は　$S(t) = 6\pi t^2$



$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

平面 α による立方体の断面は、六角形になる。
この1つの頂点 $(1,\ 0,\ 3t-1)$ と、P との距離は

$$\sqrt{(1-t)^2 + t^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{6t^2 - 6t + 2}$$

平面 α による回転体の断面積は　$S(t) = \pi(6t^2 - 6t + 2)$

求める体積は

$$\therefore 2\int_0^{\frac{1}{2}} S(t) \cdot \sqrt{3}\,dt = 12\sqrt{3}\pi \int_0^{\frac{1}{3}} t^2\,dt + 2\sqrt{3}\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (6t^2 - 6t + 2)\,dt = 4\sqrt{3}\pi \Big[t^3\Big]_0^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3}\pi \Big[2t^3 - 3t^2 + 2t\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\sqrt{3}\pi \cdot \frac{1}{27} + 2\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 - \frac{2}{27} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi + 2\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{27}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi + \frac{5\sqrt{3}}{27}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \quad \cdots\cdots(答)$$

※1993年東工大後期 $\boxed{1}$ と同一問題。

2010年京大理乙 $\boxed{6}$

n 個のボールは、 $2n$ 個の箱のいずれかに入るから、すべての入り方は $(2n)^n = 2^n n^n$ 通り

どの箱にも1個以下のボールしか入っていないとき、 $2n$ 個中 n 個の箱に1個のボールが入っている。

そのような入り方の総数は、$2n$ 個から n 個を選んで並べる場合の数に等しく、 ${}_{2n}P_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ 通り

$p_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n^n n!} = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n^n}$ であるから

$$\log p_n = \log\left(\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right) - n\log 2 = \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\log 2$$

$$\frac{\log p_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \log 2$$

区分求積法により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log(1+x)dx = \Big[(1+x)\log(1+x) - x\Big]_0^1 = 2\log 2 - 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} = 2\log 2 - 1 - \log 2 = \log 2 - 1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$