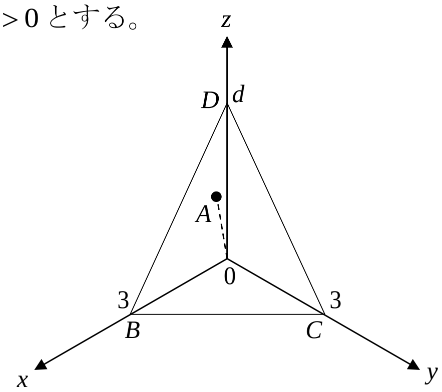
2011 年京大文 $\boxed{2}$

座標空間において、原点を O 、 $A(s, t, u), B(3, 0, 0), C(0, 3, 0)$ とおく。 $u>0$ とする。



$\overrightarrow{BC}=(-3, 3, 0)$ であり、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから　$-3s+3t=0$　$\therefore s=t$

$A(s, s, u)$ とおけて、$OA=2$ より　$OA^2=2s^2+u^2=4$ ——①

$AB=\sqrt{7}$ より　$AB^2=(s-3)^2+s^2+u^2=2s^2+u^2-6s+9=7$

　$\therefore 2s^2+u^2-6s=-2$ ——②

①－②より　$6s=6$　$\therefore s=1$　①より　$u^2=4-2=2$　$\therefore u=\sqrt{2}$

$A(1, 1, \sqrt{2}), B(3, 0, 0), C(0, 3, 0)$ を通る平面 α を考える。

$B(3, 0, 0), C(0, 3, 0), D(0, 0, d)$ を通る平面は、$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{d}=1$ と表せる。これが $A(1, 1, \sqrt{2})$ を通るとき

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{d}=1\quad \frac{\sqrt{2}}{d}=\frac{1}{3}\quad \therefore d=3\sqrt{2}$$

平面 α の方程式は　$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3\sqrt{2}}=1$　$\therefore \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z-3\sqrt{2}=0$

求める OH の長さは、原点 O と平面 α の距離に等しいから　$\dfrac{\left|-3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+2+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$　……(答)

※立体幾何を利用したが、もちろんベクトルの利用でもよいし、そちらが常道だろう。