2011年京大理 [1]

(1)

すべての2枚のカードの選び方は　${}_9C_2=\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$通り。

2枚のカードを同時に選び、小さい方の数が k $(1\leqq k\leqq8)$ である確率は、

一方の数がkで、もう一方の数がkより大きい$9-k$個の数のいずれかであるから、$\dfrac{9-k}{36}$。

$X=Y$ となる確率は

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{k}{36}\right)^2=\frac{1}{2^4}\sum_{k=1}^{8}1-\frac{1}{2^3 3^2}\sum_{k=1}^{8}k+\frac{1}{2^4 3^4}\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{8}{2^4}-\frac{8\cdot9}{2^4 3^2}+\frac{8\cdot9\cdot17}{2^5 3^5}=\frac{17}{2^2 3^3}=\frac{17}{108}$$ ……(答)

(2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x^2)'\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$$

(解答1)

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta d\theta$

x	$0\to\frac{1}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

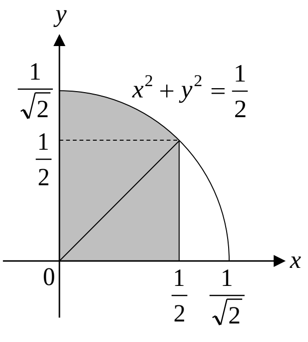
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}$$

(解答2)

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$は、右図の網掛部の面積に等しいから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}$$



以上により

$$\therefore\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}+\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{6}$$ ……(答)