2011年京大理$\boxed{4}$

数学的帰納法により示す。

$n=2$のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)=1-a_1-a_2+a_1a_2-1+a_1+\frac{a_2}{2}=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{2}<a_1<1$より　$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)>0$　$\therefore (1-a_1)(1-a_2)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)$

$n=2$のとき成立。

$n=k$のとき　$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$と仮定する。

両辺に$1-a_{k+1}$をかけると

$$\begin{aligned}&(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})\\&\quad>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})=1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)-a_{k+1}\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}\end{aligned}$$

ここで　$1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)<1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^k}$　$\left(\because \frac{1}{2}<a_j<1\right)$

$$\therefore (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)-a_{k+1}\cdot\frac{1}{2^k}=1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

したがって、$n=k+1$でも成立。

以上により示された。（証明終）