2011 年京大理 $\boxed{5}$

3 点 $(4,\ 0,\ 0),\ (0,\ 4,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α の方程式は、 $x+y+z=4$ で与えられる。

α と原点の距離は　$\dfrac{|0+0+0-4|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$　$\dfrac{16}{3}<6$ より　$\therefore \dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$

したがって、平面 α と球面 S は共有点を持つ。(証明終)

次に、点 $(x,\ y,\ z)$ が平面 α と球面 S の共有点であるとき、 $x+y+z=4,\ x^2+y^2+z^2=6$ より

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(yz+zx+xy)=16-2(yz+zx+xy)=6 \quad \therefore yz+zx+xy=5$$

$xyz=a$ とすると、解と係数の関係により、$x,\ y,\ z$ は 3 次方程式 $p^3-4p^2+5p-a=0$ の 3 つの実数解である。重解を含む。 $a=p^3-4p^2+5p$ として、直線 $q=a$ と曲線 $q=p^3-4p^2+5p$ が、重解を含む 3 つの共有点を持つ範囲を調べればよい。

$f(p)=p^3-4p^2+5p$ とすると

$$f'(p)=3p^2-8p+5=(3p-5)(p-1)$$

$f(p)$ の増減は右の通りで、 $p=1$ のとき極大、 $p=\dfrac{5}{3}$ のとき極小。

p	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(p)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(p)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(1)=2$ 、 $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{125}{27}-\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{3}=\dfrac{125-300+225}{27}=\dfrac{50}{27}$ であるから

求める範囲は　$\dfrac{50}{27}\leqq a\leqq 2$　$\therefore \dfrac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$　……(答)