2011 年京大理 $\boxed{6}$

三角形 ABC を含む平面を xy 平面とし、さらに三角形 ABC の外接円の中心を原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ としても、一般性を失わない。三角形 ABC の外接円の半径を r とする。

z 軸上に点 $O'(0,\ 0,\ d)$ をとると、$O'A^2 = O'B^2 = O'C^2 = r^2 + d^2$ である。

$D(s,\ t,\ u)$ とすると　$O'D^2 = s^2 + t^2 + (u-d)^2$

$O'A^2 = O'B^2 = O'C^2 = O'D^2$ とすると　$r^2 + d^2 = s^2 + t^2 + (u-d)^2$　$2ud = s^2 + t^2 + u^2 - r^2$

$A,\ B,\ C,\ D$ は同一平面上にないから $u \neq 0$ であり、$\therefore d = \dfrac{s^2 + t^2 + u^2 - r^2}{2u}$

したがって、$O'A = O'B = O'C = O'D$ となる点 O' が必ず定まる。

以上により、O' を中心とし、$A,\ B,\ C,\ D$ を通る球面が存在する。（証明終）