2012 年京大理 $\boxed{6}$

定義により、$\dfrac{1}{Y_k} \leqq 1$、$1 \leqq Y_k \leqq 7$ である。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{k+1} \leqq 1+\sqrt{3}$ となる条件を考える。

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k \leqq 1+\sqrt{3}$ のとき

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} \leqq \frac{1}{Y_k} \leqq \frac{2}{1+\sqrt{3}} \qquad \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_k} \leqq -1+\sqrt{3} \qquad X_{k+1} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{k+1} \leqq X_{k+1} - 1 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{k+1} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ X_{k+1} - 1 + \sqrt{3} \leqq 1+\sqrt{3} \qquad \therefore 1 \leqq X_{k+1} \leqq 2$$

$1 \leqq Y_k < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} < \frac{1}{Y_k} \leqq 1 \qquad -1+\sqrt{3} < \frac{1}{Y_k} \leqq 1 \qquad X_{k+1} - 1 + \sqrt{3} < Y_{k+1} \leqq X_{k+1} + 1$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{k+1} - 1 + \sqrt{3},\ X_{k+1} + 1 \leqq 1+\sqrt{3} \qquad \frac{3-\sqrt{3}}{2} \leqq X_{k+1} \leqq \sqrt{3} \qquad \therefore X_{k+1} = 1$$

$1+\sqrt{3} < Y_k \leqq 7$ のとき

$$\frac{1}{7} \leqq \frac{1}{Y_k} < \frac{1}{1+\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{7} \leqq \frac{1}{Y_k} < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \qquad X_{k+1} + \frac{1}{7} \leqq Y_{k+1} < X_{k+1} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{k+1} + \frac{1}{7},\ X_{k+1} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1+\sqrt{3} \qquad \frac{5+7\sqrt{3}}{14} \leqq X_{k+1} \leqq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore X_{k+1} = 2$$

以上により

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k \leqq 1+\sqrt{3}$ のとき　確率 $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ で $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{k+1} \leqq 1+\sqrt{3}$ になる。

$Y_k < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ 1+\sqrt{3} < Y_k$ のとき　確率 $\dfrac{1}{6}$ で $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{k+1} \leqq 1+\sqrt{3}$ になる。

p_n に関する漸化式を立てると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} \qquad p_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{5}\right)$$

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1 \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは $X_1 = 2$ のときのみで、$p_1 = \dfrac{1}{6}$ であるから

$$p_n - \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \qquad \therefore p_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n}\right\} \ \cdots\cdots (答)$$