2012年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$ としても、一般性を失わない。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ である。

実数 $p,\ q,\ r$ について、$0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1$ とし、$\overrightarrow{OP}=p\vec{a},\ \overrightarrow{OQ}=q\vec{b},\ \overrightarrow{OR}=r\vec{c}$ とすると

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|q\vec{b}-p\vec{a}\right|^2=q^2\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+p^2\left|\vec{a}\right|^2=q^2-pq+p^2 \quad \text{——①}$$

同様に　$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=r^2-pr+q^2$ ——②　$\left|\overrightarrow{RP}\right|^2=p^2-rp+r^2$ ——③

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\left|\overrightarrow{RP}\right|^2$ であるとき、①－②より　$-pq+p^2-r^2+qr=(p-r)(p+r-q)=0$ ——④

同様に　②－③より　$(q-p)(q+p-r)=0$ ——⑤　③－①より　$(r-q)(r+q-p)=0$ ——⑥

④より、$p=r$ または $q=p+r$ である。$q=p+r$ のとき

$q-p=r\neq0,\ q+p-r=2p\neq0$ より、⑤を満たさない。$r-q=-p\neq0,\ r+q-p=-2r\neq0$ より、⑥を満たさない。

適するのは　$\therefore p=r$

同様に、⑤から $q=p$ が導かれ、⑥から $r=q$ が導かれるから　$\therefore p=q=r$

したがって、$\triangle OAB \backsim \triangle OPQ$、$\triangle OBC \backsim \triangle OQR$、$\triangle OCA \backsim \triangle ORP$ であるから

$\therefore AB \parallel PQ,\ BC \parallel QR,\ CA \parallel RP$　（証明終）