

2013 年京大文 [1]

$$a=2 \text{ のとき } f(x)=(x+2)^2 \geq 0$$

$f(f(x)) > 0$ となる条件は、 $f(x) \neq -2$ であるが、 $f(x) \geq 0$ であるから、すべての実数 x について成立。

$a > 2$ のとき

$$f(x) = \left(x + \frac{a+2}{2}\right)^2 + 2a - \frac{(a+2)^2}{4} = \left(x + \frac{a+2}{2}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4} \geq -\frac{(a-2)^2}{4}$$

$f(f(x)) > 0$ となる条件は、 $f(x) < -a$ または $-2 < f(x)$ である。 $f(x) \geq -\frac{(a-2)^2}{4}$ がこの範囲に含まれるには

$$-2 < -\frac{(a-2)^2}{4} \quad (a-2)^2 < 8 \quad 2-2\sqrt{2} < a < 2+2\sqrt{2} \quad \therefore 2 < a < 2+2\sqrt{2}$$

以上をまとめて $2 \leq a < 2+2\sqrt{2}$ ……(答)