2013 年京大理 $\boxed{4}$

$f(x)=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とする。 $f(x)$ は偶関数であるから、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で考える。

$f'(x)=-\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \qquad f''(x)=-\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)$ の増減は、右の通り。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(0)=0$、 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi<0$、 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi>0$ より、

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

これを $x=\alpha$ とすると、 $f(x)$ の増減は、右の通り。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x)$ の最大値を与える x は、 $x=0$ か $x=\dfrac{\pi}{2}$ である。

$f(0)=1$、 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2>\dfrac{1.7\times3.1^2}{16}=\dfrac{16.337}{16}>1$ であるから、

求める最大値は　$\therefore f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$ ……(答)