2014 年京大文 $\boxed{2}$

(1)

C 上の点 $(s,\ s^3-s)$ における、接線の方程式は　$y=(3s^2-1)(x-s)+s^3-s=(3s^2-1)x-2s^3$

これが $P(1,\ t)$ を通るとき　$t=3s^2-1-2s^3=-2s^3+3s^2-1$

これを s に関する 3 次方程式と見て、実数解がただ 1 つである条件を求めればよい。

$f(s)=-2s^3+3s^2-1$ とすると　$f'(s)=-6s^2+6s=-6s(s-1)$

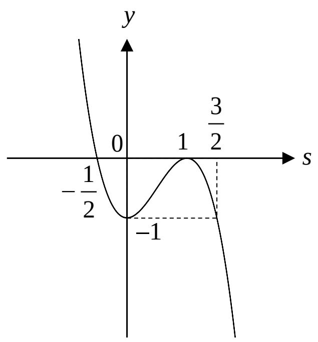
$f(s)$ の増減は右の通り。

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(s)$	↘	-1	↗	0	↘

極大値は $f(1)=0$　極小値は $f(0)=-1$

グラフより、$y=f(s)$ と $y=t$ が、ただ 1 つの共有点を持つ条件は

$\therefore t<-1,\ 0<t$　……(答)



(2)

C の接線 $y=(3s^2-1)x-2s^3$ と、C との接点以外の共有点は

$x^3-x=(3s^2-1)x-2s^3$　$x^3-3s^2x+2s^3=(x-s)^2(x+2s)=0$　$\therefore x=-2s$

C と接線で囲まれた部分の面積は

$$S=\left|\int_{-2s}^{s}\left\{x^3-x-(3s^2-1)x+2s^3\right\}dx\right|=\left|\int_{-2s}^{s}(x-s)^2(x+2s)dx\right|=\frac{(s+2s)^4}{12}=\frac{27}{4}s^4$$

ここで、$t=-2s^3+3s^2-1$ であるから

$t<-1$ のとき　$-2s^3+3s^2-1<-1$　$2s^3-3s^2=s^2(2s-3)>0$　$\therefore s>\dfrac{3}{2}$

$0<t$ のとき　$-2s^3+3s^2-1>0$　$2s^3-3s^2+1<(s-1)^2(2s+1)<0$　$\therefore s<-\dfrac{1}{2}$

$t<-1,\ 0<t$ のとき、$s<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}<s$ ――①　であるから、①における $S=\dfrac{27}{4}s^4$ の範囲を求めればよい。

①のとき、$s^4>\dfrac{1}{16}$ であるから　$\therefore S(t)>\dfrac{27}{64}$　……(答)

(注)

$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ を用いた。導出は以下の通り。

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx=\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

①の範囲は、グラフから求めてもよい。