2014 年京大文$\boxed{4}$

(1)

$a_{n+1}=2a_n-1 \quad a_{n+1}-1=2(a_n-1) \quad a_n-1=2^{n-1}(a_1-1)=2^{n-1} \quad \therefore a_n=2^{n-1}+1$ ……(答)

(2)

$a_n{}^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=2^{2n-2}-1>10^{15} \quad 2^{2n-2}-10^{15}>1$

ここで、$n=1$は不適であるから、2^{2n-2}と10^{15}はともに偶数であり、$2^{2n-2}-10^{15}>0$であれば、$2^{2n-2}-10^{15}$は偶数である。したがって、$2^{2n-2}-10^{15}>0$であれば、$2^{2n-2}-10^{15}>1$が成り立つ。
結局、$2^{2n-2}>10^{15}$となる最小のnを求めればよい。両辺の自然対数をとると

$$(2n-2)\log_{10}2>15 \quad 2n-2>\frac{15}{\log_{10}2} \quad n>1+\frac{15}{2\log_{10}2}$$

$\dfrac{15}{2\times0.3011}<\dfrac{15}{2\log_{10}2}<\dfrac{15}{2\times0.3010}$より　$24.908\cdots<\dfrac{15}{2\log_{10}2}<24.916\cdots \quad n>25.916\cdots$

求める最小の自然数は　$\therefore n=26$ ……(答)