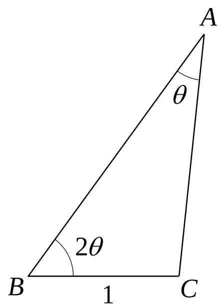
2014 年京大理$\boxed{3}$



$\angle A=\theta,\ \angle B=2\theta$ とする。$3\theta<\pi$ より　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{CA}{\sin 2\theta}$　$\therefore CA=BC\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

$\angle C=\pi-3\theta$ であるから、$\triangle ABC$ の面積は

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot\sin(\pi-3\theta)=\cos\theta\sin 3\theta=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

$$S'(\theta)=2\cos 4\theta+\cos 2\theta=2(2\cos^2 2\theta-1)+\cos 2\theta=4\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2$$

$4t^2+t-2=0$ を解くと　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$　$0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ より　$-\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$

$-\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}<-\dfrac{1+5}{8}=-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{1}{2}$ であるから、$S'(\theta)=0$ のとき　$\therefore \cos 2\theta=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$

$\cos 2\theta=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ となる θ を、$\theta=\alpha$ とすると、$S(\theta)$ の増減は右の通り。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、$S(\theta)$ が最大になるとき、$\cos 2\theta=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ である。

以上により、求める値は　$\therefore \cos\angle B=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$　……(答)