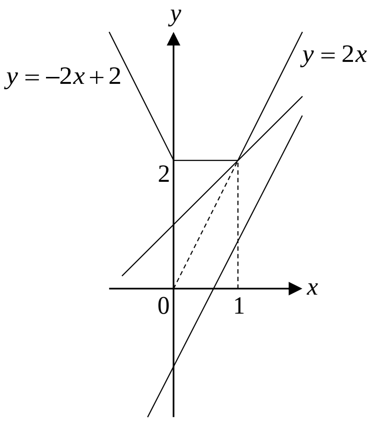
2015年京大文 $\boxed{1}$

$f(x)=|x|+|x-1|+1$とすると

$x<0$のとき　$f(x)=-x-x+1+1=-2x+2$　$0\leqq x<1$のとき　$f(x)=x-x+1+1=2$

$1\leqq x$のとき　$f(x)=x+x-1+1=2x$

$q\geqq 2$ならば、$y=px+q$と$y=f(x)$は、必ず交点を持つから、$q<2$である。




$0\leqq q<2$のとき

$y=px+q$が点(1, 2)を通るとき、傾きは$p=2-q$である。

$y=px+q$と$y=f(x)$と交点を持たない条件は　$\therefore -2\leqq p<2-q$

$q<0$のとき

$y=px+q$と$y=f(x)$と交点を持たない条件は　$\therefore -2\leqq p\leqq 2$

$y=px+q$と$y=x^2-x$は交点を持つので

$x^2-x=px+q$　$x^2-(p+1)x-q=0$が実数解を持つ。

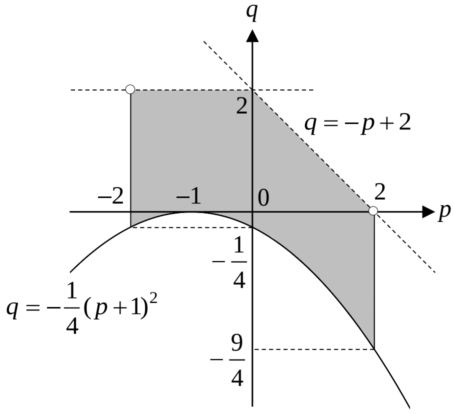
$$D=(p+1)^2+4q\geqq 0 \quad \therefore q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

以上により

$0\leqq q<2$のとき$-2\leqq p,\ q<-p+2$ ——①　$q<0$のとき$-2\leqq p\leqq 2$ ——②　$q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$ ——③

これらを図示すると、右図の通り。

境界線は実線部のみ含み、点(−2, 2), (2, 0)は含まない。




面積は

$$4+2+\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(p+1)^2\,dp$$

$$=6+\frac{1}{4}\left[\frac{(p+1)^3}{3}\right]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{4}\left(9+\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$