2015年京大文 $\boxed{4}$

$R(u,\ v,\ 0)$ とおくと、$\overrightarrow{PR} = (u-1,\ v,\ -2)$ である。

直線 PR 上の点は、$\overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PR} = (1+(u-1)t,\ vt,\ 2-2t)$ と表せる。

これを球面 S の方程式 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ に代入すると

$\{1+(u-1)t\}^2 + v^2t^2 + (1-2t)^2 = 1 \quad \{(u-1)^2 + v^2 + 4\}t^2 + \{2(u-1)-4\}t + 1 = 0$

$\{(u-1)^2 + v^2 + 4\}t^2 + 2(u-3)t + 1 = 0$ ——①

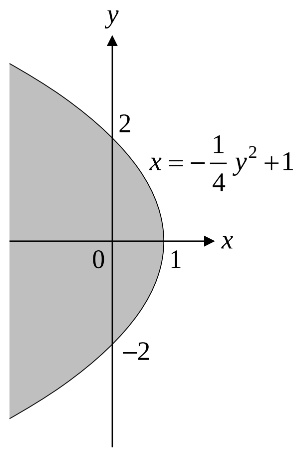
t に関する 2 次方程式①が、実数解を持つから

$D/4 = (u-3)^2 - \{(u-1)^2 + v^2 + 4\} \geqq 0 \quad v^2 + 4 + (u^2 - 2u + 1) - (u^2 - 6u + 9) \leqq 0$

$v^2 - 4 + 4u \leqq 0 \quad \therefore u \leqq -\dfrac{1}{4}v^2 + 1$

以上により、xy 平面上で R が動く範囲は　$\therefore x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2 + 1$ ……(答)

図示すると右図の通りで、境界線を含む。



(注)

点 R が境界線を通るとき、直線 PR は球面 S に接する。