2015 年京大理 $\boxed{3}$

(1)

$y=e^x+1$ 上の点 $(t,\ e^t+1)$ における接線は　$y=e^t(x-t)+e^t+1$

これが $(a,\ 0)$ を通るとき　$0=e^t(a-t)+e^t+1$　$a=t-e^{-t}-1$ ――①

任意の実数 a について、①を満たす実数 t がただ 1 つであることを示せばよい。

$f(t)=t-e^{-t}-1$ とすると　$f'(t)=1+e^{-t}>0$

$f(t)$ は単調増加であり、$\lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty,\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$ であるから、①を満たす実数 t はただ 1 つである。

以上により、題意は示された。（証明終）

(2)

点 $(a_n,\ 0)$ から $y=e^x+1$ に引いた接線の x 座標が、a_{n+1} になるから、①より

$a_n=a_{n+1}-e^{-a_{n+1}}-1$　$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1$ ――②

②より　$\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_1=a_n-1=\sum_{k=2}^{n}e^{-a_k}+(n-1)>n-1$　$\therefore a_n>n$

したがって、$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ であるから、②より　$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=1$ ……(答)