2015年京大理 $\boxed{4}$

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ である。

$\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ であり、$\left|\overrightarrow{DP}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$\overrightarrow{DQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおくと

$$\left|\overrightarrow{DQ}\right|^2=(1-t)^2\left|\vec{a}\right|^2+2t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2\left|\vec{c}\right|^2=1-2t+t^2+t-t^2+t^2=t^2-t+1$$

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\right\}=\frac{1}{2}(1-t)\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{2}t\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}(1-t)+\frac{1}{4}t=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}t$$

$\cos\angle PDQ=\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}}{\left|\overrightarrow{DP}\right|\left|\overrightarrow{DQ}\right|}=\dfrac{3-t}{4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{3-t}{2\sqrt{3(t^2-t+1)}}$ であるから

$f(t)=\cos^2\angle PDQ=\dfrac{(3-t)^2}{12(t^2-t+1)}$ とすると

$$f'(t)=\frac{2(t-3)(t^2-t+1)-(t-3)^2(2t-1)}{12(t^2-t+1)^2}=\frac{(t-3)\left\{(2t^2-2t+2)-(t-3)(2t-1)\right\}}{12(t^2-t+1)^2}$$
$$=\frac{(t-3)(2t^2-2t+2-2t^2+7t-3)}{12(t^2-t+1)^2}=\frac{(t-3)(5t-1)}{12(t^2-t+1)^2}$$

$f(t)$ の増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{5}$ のとき極大となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	−	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{14}{5}\right)^2}{12\cdot\dfrac{1-5+25}{5^2}}=\dfrac{14^2}{12\cdot21}=\dfrac{7}{3^2}$ であるから

求める最大値は　$\therefore\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　……(答)