2015年京大理 $\boxed{5}$

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。

$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$ 、余りを r とすると、$h(x)=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$ と書ける。

n を整数とすると

$h(n)=pn+q+\dfrac{r}{dn+e}$ は、整数である。$h(n+1)=p(n+1)+q+\dfrac{r}{d(n+1)+e}$ は、整数である。

$F(n)=h(n+1)-h(n)$ とすると

$F(n)=p+\dfrac{r}{dn+d+e}-\dfrac{r}{dn+e}$ は、整数である。$F(n-1)=p+\dfrac{r}{dn+e}-\dfrac{r}{dn-d+e}$ は、整数である。

$F(n)-F(n-1)$ は、整数であるから

$$\begin{aligned}F(n)-F(n-1)&=\frac{r}{dn+e+d}+\frac{r}{dn+e-d}-\frac{2r}{dn+e}=\frac{2r(dn+e)}{(dn+e+d)(dn+e-d)}-\frac{2r}{dn+e}\\&=2r\cdot\frac{(dn+e)^2-\{(dn+e)^2-d^2\}}{(dn+e+d)(dn+e-d)(dn+e)}=\frac{2rd^2}{(dn+e+d)(dn+e-d)(dn+e)}\end{aligned}$$

これより、任意の整数 n について、$\dfrac{2rd^2}{(dn+e+d)(dn+e-d)(dn+e)}$ は整数である。

ここで、n を十分に大きくとれば、$\left|\dfrac{2rd^2}{(dn+e+d)(dn+e-d)(dn+e)}\right|<1$ となるから、$r=0$ でなければならない。

したがって、$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。（証明終）