2015年京大理 $\boxed{6}$

$0<x_{n-1}<1$のとき、 $f_0(x)$が選ばれれば$0<x_n<\dfrac{1}{2}$、 $f_1(x)$が選ばれれば$\dfrac{1}{2}<x_n<1$となる。

$x_n<\dfrac{2}{3}$となる条件は

ｉ)1つ前の操作で$f_0(x)$が選ばれる。このときx_{n-1}の値は任意。

ｉｉ)1つ前の操作で$f_1(x)$が選ばれ、なおかつ$x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$である。

のいずれかである。

さらに、 $x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$となる条件は、1つ前の操作で$f_0(x)$が選ばれ、なおかつ$x_{n-2}<\dfrac{2}{3}$である。

この確率は、 $\dfrac{1}{2}P_{n-2}$と表せる。したがって、 P_nに関する以下の漸化式を得る。

$$\therefore P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{2}\ (n\geqq 3)$$

ここで、 $P_1,\ P_2$を求める。

$x_0=\dfrac{1}{2}$のとき　$f_0(x_0)=\dfrac{1}{4},\ f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$であるから　$\therefore P_1=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\dfrac{1}{4}$のとき　$f_0(x_1)=\dfrac{1}{8},\ f_1(x_1)=\dfrac{5}{8}<\dfrac{2}{3}$　$x_1=\dfrac{3}{4}$のとき　$f_0(x_1)=\dfrac{3}{8},\ f_1(x_1)=\dfrac{7}{8}>\dfrac{2}{3}$

$x_2>\dfrac{2}{3}$となるのは、 $x_1=\dfrac{3}{4}$かつ$f_1(x)$が選ばれたときのみであるから　$\therefore P_2=1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

$P_{2m+1}=\dfrac{1}{4}P_{2m-1}+\dfrac{1}{2}\ (m\geqq 1)$より　$P_{2m+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}\left(P_{2m-1}-\dfrac{2}{3}\right)$

$$P_{2m-1}-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}\left(P_1-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\quad\therefore P_{2m-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\ \text{——①}$$

$P_{2m+2}=\dfrac{1}{4}P_{2m}+\dfrac{1}{2}\ (m\geqq 1)$より　$P_{2m+2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}\left(P_{2m}-\dfrac{2}{3}\right)$

$$P_{2m}-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}\left(P_2-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\quad\therefore P_{2m}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\ \text{——②}$$

①、②をまとめると　$\therefore P_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ ……(答)