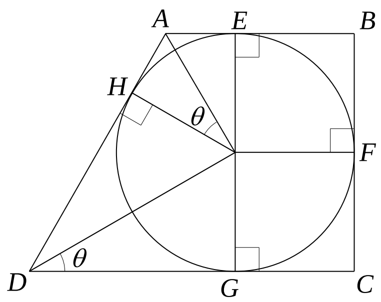
2015年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

題意の四角形の内角のうち、2つを直角、他の2つを$2\theta,\ \pi-2\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とする。

i）2つの直角が隣り合っているとき



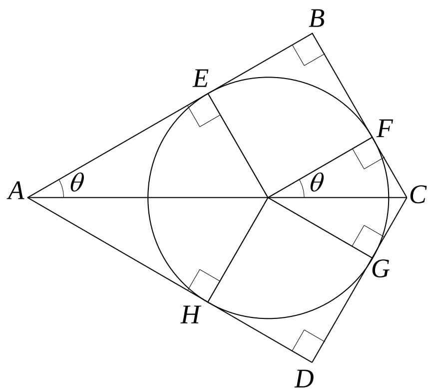
右図において、$AE=\tan\theta$であり、$DG=\dfrac{1}{\tan\theta}$であるから、

四角形$ABCD$の面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)+2=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}+2$

相加平均・相乗平均の関係より　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\geqq 2\sqrt{\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}}=2$

等号は、$\tan\theta=1$のとき、$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき成立。Sの最小値は　$\therefore 2+2=4$

ii）2つの直角が対向しているとき



右図において、$CF=\tan\theta$であり、$AE=\dfrac{1}{\tan\theta}$であるから、

四角形$ABCD$の面積は

$$S=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right)+2=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}+2$$

これはi)と同じ式であり、$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき、最小値4をとる。

以上により、求める最小値は4　……(答)
正方形になるときが、最小である。

※2003年後期文系$\boxed{3}$に類題あり。