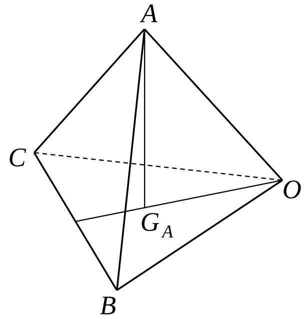
2016 年京大文 $\boxed{4}$



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

頂点 A から△OBCへ下ろした垂線の足を、G_A とする。
G_A は△OBCの重心に一致することから、

$$3\overrightarrow{AG_A}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})=-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$AG_A \perp OB,\ AG_A \perp OC$ より

$$3\overrightarrow{AG_A}\cdot\overrightarrow{OB}=-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad \text{——①} \qquad 3\overrightarrow{AG_A}\cdot\overrightarrow{OC}=-3\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=0 \quad \text{——②}$$

同様に、頂点 B から△OCAへ下ろした垂線の足を G_B とすると、$3\overrightarrow{BG_B}=\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ であるから

$$3\overrightarrow{BG_B}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\vec{a}\right|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \quad \text{——③} \qquad 3\overrightarrow{BG_B}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{c}\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=0 \quad \text{——④}$$

同様に、頂点 C から△OABへ下ろした垂線の足を G_C とすると、$3\overrightarrow{BG_C}=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ であるから

$$3\overrightarrow{CG_C}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \quad \text{——⑤} \qquad 3\overrightarrow{CG_C}\cdot\overrightarrow{OB}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad \text{——⑥}$$

①－⑥より　$-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$　②－④より　$-4\vec{c}\cdot\vec{a}+4\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

③－⑤より　$-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=t$ とすると　$\therefore \left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=2t$　$\therefore \left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}=2\vec{b}\cdot\vec{c}=2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$ であり、$\cos\angle AOB=\cos\angle BOC=\cos\angle COA=\dfrac{1}{2}$ であるから　$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{\pi}{3}$
したがって、△OAB、△OBC、△OCAは正三角形であり、△ABCも正三角形である。
以上により、四面体$OABC$は正四面体である。（証明終）

※理系 $\boxed{3}$ より大変。