2016年京大文$\boxed{5}$

$f(x)$は実数係数であり、虚数βが$f(x)=0$の解であるとき、βと共役な虚数$\overline{\beta}$も、$f(x)=0$の解である。
もう1つの解は実数であるから、これをαとする。
条件(イ)により、$f(x)=0$の3つの解$\alpha,\ \beta,\ \overline{\beta}$は、3乗すると$\alpha,\ \beta,\ \overline{\beta}$のいずれかに一致する。
実数の3乗は実数であるから、$\alpha^3=\alpha$でなければならない。
$\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=0$より　$\therefore \alpha=0,\ \pm1$

$\beta^3=\beta$とすると、同様に$\beta=0,\ \pm1$となり、虚数にならないから、不適。

$\beta^3=\overline{\beta}$のとき　$\beta^2=\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$　両辺の絶対値をとると、$|\beta|^2=1$であるから、結局$|\beta|=1$。

$\beta=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$とおけるので

$\beta^3=\cos3\theta+i\sin3\theta=\overline{\beta}=\cos\theta-i\sin\theta$　　$\cos3\theta=\cos\theta,\ \sin3\theta=-\sin\theta$

$\cos(2\theta+\theta)=\cos(2\theta-\theta),\ \sin(2\theta+\theta)=-\sin(2\theta-\theta)$　　$2\sin2\theta\sin\theta=0,\ 2\sin2\theta\cos\theta=0$

$\sin2\theta=0$でなければならない。$0\leqq\theta<2\pi$で考えると、$0\leqq2\theta<4\pi$であるから

$2\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$　　$\therefore \theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

このうち、$\theta=0,\ \pi$のとき$\sin\theta=0$となり、βが実数になるので、不適。$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\beta=i$　$\beta^3=-i=\overline{\beta}$　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$のとき　$\beta=-i$　$\beta^3=i=\overline{\beta}$

条件を満たす相違なる$\beta,\ \overline{\beta}$の組は、$i,\ -i$のみであることがわかる。これらは$x^2+1=0$の解である。

$\beta^3=\alpha$のとき　$\alpha=0$は不適であるから

$\alpha=1$のとき　$\beta^3=1$　$\beta^3-1=(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$　$\beta\neq1$より　$\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=-1$のとき　$\beta^3=-1$　$\beta^3+1=(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$　$\beta\neq-1$より　$\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

以上により、考えられる$f(x)=0$の3解の組は

$$(0,\ i,\ -i),\ (1,\ i,\ -i),\ (-1,\ i,\ -i),\ \left(1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

求める3次式$f(x)$は

$f(x)=x(x^2+1),\ (x-1)(x^2+1),\ (x+1)(x^2+1),\ (x-1)(x^2+x+1),\ (x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore f(x)=x^3+x,\ x^3\pm x^2+x\pm1,\ x^3\pm1$（複号同順）……(答)

(注)
文系は範囲外かもしれないが、複素数平面の知識を利用した。