2016 年京大理 $\boxed{2}$

$p,\ q$ がともに奇数であるとき、 $p^q,\ q^p$ はともに奇数であり、 p^q+q^p は偶数である。
$p,\ q$ がともに奇数であるとき、 p^q+q^p は素数ではないから、 $p,\ q$ のうち少なくとも一方は 2 である。
$p=q=2$ とすると、 $p^q+q^p=2^2+2^2=8$ であり、素数ではない。

$p=2,\ q\geqq 3$ とする。 $p=2,\ q=3$ のとき、 $p^q+q^p=2^3+3^2=17$ は、素数である。
$p=2,\ q\geqq 5$ のとき
q は奇数であるから　 $p^q=2^q=(3-1)^q=(3\text{の倍数})+(-1)^q=(3\text{の倍数})-1$
また、 k を自然数として、 $q=3k\pm 1$ と書けるから　 $q^2=(3k\pm 1)^2=3(3k^2\pm 2k)+1=(3\text{の倍数})+1$
これより　 $\therefore p^q+q^p=(3\text{の倍数})-1+(3\text{の倍数})+1=(3\text{の倍数})$
したがって、 $p=2,\ q\geqq 5$ のとき、 p^q+q^p は、1 と p^q+q^p 以外に少なくとも 3 を約数に持ち、素数ではない。

対称性より、 p^q+q^p が素数になるような、素数 $p,\ q$ の組は　 $(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$
求める素数は　 $\therefore 17$ ……(答)