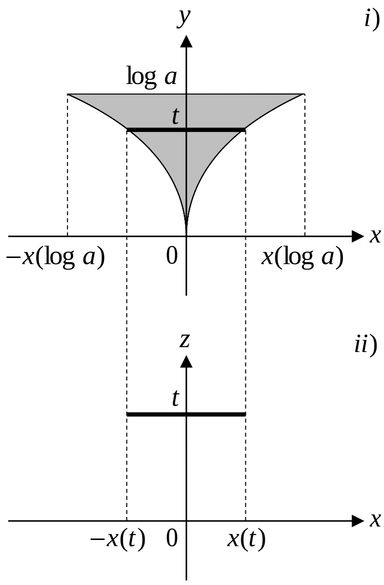
2016 年京大理 $\boxed{4}$



$x(t)=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}-1$ とする。

図形 D の xy 平面への正射影は、右図 i)のようになる。

図形 D と、平面 $y=t\ (0\leqq t\leqq \log a)$ との交差部に現れる線分は、
右図 ii)のようになる。

$y=t$ において、この線分の中心と回転軸までの距離は t であり、

線分の端点と回転軸までの距離は　$r(t)=\sqrt{\{x(t)\}^{2}+t^{2}}$

題意の回転体の、$y=t$ における断面は、外径 $r(t)$ 、内径 t のドーナツ型
である。面積は

$$S(t)=\pi\{r(t)\}^{2}-\pi t^{2}=\pi\left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}-1\right)^{2}=\frac{\pi}{4}(e^{t}+e^{-t}-2)^{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^{2t}+e^{-2t}+4+2-4e^{t}-4e^{-t})=\pi\left(\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{t}-e^{-t}+\frac{3}{2}\right)$$

求める体積は

$$\int_{0}^{\log a}S(t)dt=\pi\int_{0}^{\log a}\left(\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{t}-e^{-t}+\frac{3}{2}\right)dt=\pi\left[\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}-e^{t}+e^{-t}+\frac{3}{2}t\right]_{0}^{\log a}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^{2}-\frac{1}{a^{2}}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\log a\right\}$$ ……(答)