2016年京大理 $\boxed{5}$

n 秒後に $x=i\ (i=0,1,2)$ である確率を、 $p_n(i)$ と表す。

$x=0$ のとき、1 秒後、確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x=0$ か $x=1$ である。 $x=2$ のとき、1 秒後、確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x=1$ か $x=2$ である。

$x=1$ のとき、1 秒後、確率 $\dfrac{1}{3}$ で $x=0$ か $x=1$ か $x=2$ である。

これより、以下の漸化式が成り立つ。

$p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}p_n(0)+\dfrac{1}{3}p_n(1)$ ——① $p_{n+1}(2)=\dfrac{1}{3}p_n(1)+\dfrac{1}{2}p_n(2)$ ——②

$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{2}p_n(0)+\dfrac{1}{3}p_n(1)+\dfrac{1}{2}p_n(2)$ ——③

①－②より $p_{n+1}(0)-p_{n+1}(2)=\dfrac{1}{2}\{p_n(0)-p_n(2)\}$ $p_n(0)-p_n(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\{p_1(0)-p_1(2)\}$

$p_1(0)=\dfrac{1}{2}$, $p_1(2)=0$ であるから $p_n(0)-p_n(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $\therefore p_n(2)=p_n(0)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ——④

（解答 1）

③と $p_n(0)+p_n(2)=1-p_n(1)$ より $p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{3}p_n(1)+\dfrac{1}{2}\{1-p_n(1)\}=-\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{2}$

$p_{n+1}(1)-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{1}{6}\left\{p_n(1)-\dfrac{3}{7}\right\}$ $p_n(1)-\dfrac{3}{7}=\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left\{p_1(1)-\dfrac{3}{7}\right\}$

$p_1(1)=\dfrac{1}{2}$ であるから $p_n(1)-\dfrac{3}{7}=\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{1}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=-\dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ $\therefore p_n(1)=\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$ ——⑤

④より $p_n(1)=1-p_n(0)-p_n(2)=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2p_n(0)$ $\therefore p_n(0)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{2}p_n(1)$

⑤を代入すると $\therefore p_n(0)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{3}{14}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}=\dfrac{2}{7}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ ……(答)

（解答 2） $p_n(0)$ のみの漸化式にしても、解けなくはない。

④より $p_n(1)=1-p_n(0)-p_n(2)=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2p_n(0)$

①に代入すると $p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}p_n(0)+\dfrac{1}{3}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2p_n(0)\right\}=-\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$p_{n+1}(0)-\dfrac{2}{7}=-\dfrac{1}{6}\left\{p_n(0)-\dfrac{2}{7}\right\}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $2^n\left\{p_{n+1}(0)-\dfrac{2}{7}\right\}=-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n-1}\left\{p_n(0)-\dfrac{2}{7}\right\}+\dfrac{1}{3}$

$a_n = 2^{n-1}\left\{p_n(0) - \dfrac{2}{7}\right\}$とおくと　$a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}$　$a_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}\left(a_n - \dfrac{1}{4}\right)$

$a_1 = p_1(0) - \dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{14}$より　$a_n - \dfrac{1}{4} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{28}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　$a_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{28}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$p_n(0) - \frac{2}{7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{28}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{28}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n}$$

$\therefore p_n(0) = \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n}$ ……(答)