2016年京大理 $\boxed{6}$

$x^2=f(x)-(ax+b)$ より、$x^6=Q(x)f(x)-(ax+b)^3$ と表せるので

$$f(x^3)=x^6+ax^3+b=Q(x)f(x)-(ax+b)^3+axf(x)-(a^2x^2+abx)+b$$
$$=\left\{Q(x)+ax\right\}f(x)-(ax+b)^3-(a^2x^2+abx)+b$$

$f(x^3)$ が $f(x)$ で割り切れるとき、$(ax+b)^3+(a^2x^2+abx)-b$ が $f(x)$ で割り切れる。

$$(ax+b)^3+(a^2x^2+abx)-b$$
$$=a^3x^3+a^2(3b+1)x^2+ab(3b+1)x+b^3-b$$
$$=a^3x(x^2+ax+b)-a^4x^2-a^3bx+a^2(3b+1)x^2+ab(3b+1)x+b^3-b$$
$$=a^3xf(x)+a^2(3b+1-a^2)x^2+ab(3b-a^2+1)x+b^3-b$$
$$=a^3xf(x)+a^2(3b+1-a^2)(x^2+ax+b)-a^3(3b+1-a^2)x-a^2b(3b+1-a^2)+ab(3b-a^2+1)x+b^3-b$$
$$=a^3xf(x)+a^2(3b+1-a^2)f(x)+(3ab^2-a^3b+ab-3a^3b-a^3+a^5)x+b^3-b-3a^2b^2-a^2b+a^4b$$
$$=\left\{a^3x+a^2(3b+1-a^2)\right\}f(x)+a(3b^2-4a^2b+b-a^2+a^4)x+b(b^2-1-3a^2b-a^2+a^4)$$

したがって、以下が成り立つ。

$a(3b^2-4a^2b+b-a^2+a^4)=0$ ——① $b(b^2-1-3a^2b-a^2+a^4)=0$ ——②

①より、$a=0$ とすると、②は $b(b^2-1)=0$、$b=0,\ \pm1$ となり、$a,\ b$ の両方が実数となるから、不適。

②より、$b=0$ とすると、①は $a(-a^2+a^4)=a^3(a^2-1)=0$、$a=0,\ \pm1$ となり、不適。

$3b^2-4a^2b+b-a^2+a^4=0$ ——③ $b^2-1-3a^2b-a^2+a^4=0$ ——④

③−④より　$2b^2-a^2b+b+1=0$　$\therefore a^2b=2b^2+b+1$

③、④に代入して　$a^4-a^2=-3b^2+4a^2b-b=-3b^2+4(2b^2+b+1)-b=5b^2+3b+4$

さらに、$a^2=2b+1+\dfrac{1}{b}$ であるから

$$a^4-a^2=a^2(a^2-1)=\left(2b+1+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{b}\right)=5b^2+3b+4 \quad (2b^2+b+1)(2b^2+1)=5b^4+3b^3+4b^2$$
$$(2b^2+1)^2+b(2b^2+1)=4b^4+4b^2+1+2b^3+b=5b^4+3b^3+4b^2$$
$$b^4+b^3-b-1=(b+1)(b^3-1)=(b+1)(b-1)(b^2+b+1)=0$$

$b=-1$ のとき　$a^2=-2$　$a=\pm\sqrt{2}i$　これは条件を満たす。

$b=1$ のとき　$a^2=4$　$a=\pm2$　これは条件を満たさず、不適。

$b^2+b+1=0$ のとき　$b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると、$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$、$\omega^3=1$ であるから

$b=\omega$ のとき　$a^2=\dfrac{2\omega^2+\omega+1}{\omega}=\dfrac{\omega^2}{\omega}=\dfrac{\omega^4}{\omega^3}=\omega^4$　$\therefore a=\pm\omega^2=\mp\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$b=\omega^2$ のとき　$a^2=\dfrac{2\omega^4+\omega^2+1}{\omega^2}=\dfrac{2\omega+\omega^2+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega}{\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2$　$\therefore a=\pm\omega=\pm\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

以上により、求める2次式は

$\therefore f(x)=x^2\pm\sqrt{2}ix-1,\ x^2\pm\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}x+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ x^2\pm\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}x-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ……(答)