2017 年京大文 $\boxed{1}$

$C$ 上の点 $(t,\ t^3-4t+1)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t+1=(3t^2-4)x-2t^3+1$$

これが $P(3,\ 0)$ を通るとき　$3(3t^2-4)-2t^3+1=-2t^3+9t^2-11=0$　$2t^3-9t^2+11=(t+1)(2t^2-11t+11)=0$

$3t^2-4<0$ であるから、$t^2<\dfrac{4}{3}$ である。$t=-1$ は条件を満たす。

$2t^2-11t+11=0$ を解くと　$t=\dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$　$\left(\dfrac{11+\sqrt{33}}{4}\right)^2>\left(\dfrac{11-\sqrt{33}}{4}\right)^2>\left(\dfrac{11-6}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}>\dfrac{4}{3}$ より、不適。

したがって、$l$ の式は $y=-x+3$ である。

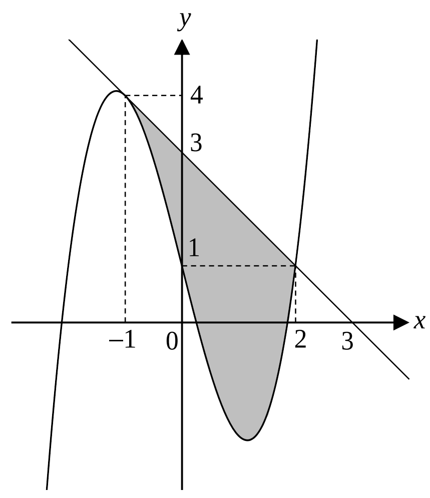
$x^3-4x+1=-x+3$ とすると　$x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)=0$　接点以外の交点の $x$ 座標は $2$ である。

$f(x)=x^3-4x+1$ とすると　$f'(x)=3x^2-4=3\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ の増減は右の通り。

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

これより、$C$ と $y=l$ で囲まれる領域は、
右図のようになる。




面積は

$$\int_{-1}^{2}\left\{(-x+3)-(x^3-4x+1)\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-4+6+4+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2=\frac{27}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

※$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ が利用できるが、
　普通に計算しても大した手間ではない。