2017年京大文$\boxed{4}$

(1)

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲で考えてよい。

$\beta=\dfrac{\pi}{4}$、すなわち$q=1$のとき　$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-p=2$

pは自然数であるから、不適。したがって、$\beta\neq\dfrac{\pi}{4}$、$\tan\beta\neq1$であるから

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan2\beta}{1-\tan\alpha\tan2\beta}=2 \quad \tan\alpha+\tan2\beta=2-2\tan\alpha\tan2\beta$$

$$\tan\alpha+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=2-2\tan\alpha\cdot\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} \quad \tan\alpha(1-\tan^2\beta)+2\tan\beta=2(1-\tan^2\beta)-4\tan\alpha\tan\beta$$

$\tan\alpha=\dfrac{1}{p},\ \tan\beta=\dfrac{1}{q}$を代入して

$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{q}=2\left(1-\frac{1}{q^2}\right)-\frac{4}{pq} \quad q^2-1+2pq=2p(q^2-1)-4q \quad 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1 \text{ ——①}$$

$q=2,\ 3$について調べればよい。

$q=2$のとき、①は　$2p=11$　$p=\dfrac{11}{2}$は不適。$q=3$のとき、①は　$10p=20$　$\therefore p=2$

以上により、$q\leqq3$である組は　$\therefore(p,\ q)=(2,\ 3)$　……(答)

(2)

$q>3$のとき　$q^2-q-1=\left(q-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}>0$　$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq1$より

$$q^2+4q-1\geqq2(q^2-q-1) \quad q^2-6q-1\leqq0 \quad \{q-(3-\sqrt{10})\}\{q-(3+\sqrt{10})\}\leqq0$$

$6<3+\sqrt{10}<7$であるから、$q>3$である組が存在ならば、$q=4,\ 5,\ 6$に限られる。

それぞれ調べると　$f(6)=\dfrac{59}{58}$　$f(5)=\dfrac{22}{19}$　$f(4)=\dfrac{31}{22}$　いずれも不適。

以上により、$q>3$である組は存在しない。(証明終)

※理系$\boxed{3}$の類題。