2017年京大理 $\boxed{1}$

(1)

実数 R を用いて、$w=Re^{i\theta}$ とおくと

$$w+\frac{1}{w}=Re^{i\theta}+\frac{1}{R}e^{-i\theta}=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta=x+yi \qquad x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta,\ y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$R>1$ より、$R-\frac{1}{R}=\frac{R^2-1}{R}>0$ であるから　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$

偏角 θ は任意であるから、求める軌跡は、楕円 $\frac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ である。……(答)

(2)

正の実数 R を用いて、$w=Re^{i\alpha}$ とおくと、(1)と同様に、$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\alpha,\ y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\alpha$ であるから

$$x^2=\left(R+\frac{1}{R}\right)^2\cos^2\alpha=\left(R^2+\frac{1}{R^2}+2\right)\cos^2\alpha \qquad y^2=\left(R-\frac{1}{R}\right)^2\sin^2\alpha=\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\right)\sin^2\alpha$$

$\cos\alpha>0,\ \sin\alpha>0$ であるから　$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}=R^2+\frac{1}{R^2}+2 \qquad \frac{y^2}{\sin^2\alpha}=R^2+\frac{1}{R^2}-2$

辺々引くと　$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=4 \qquad \therefore \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$

ここで、R は $R>0$ なる変数である。

相加平均・相乗平均の関係より　$R+\frac{1}{R}\geqq 2\sqrt{R\cdot\frac{1}{R}}=2 \qquad \therefore x\geqq 2\cos\alpha$

$f(R)=R-\frac{1}{R}$ とすると、$f'(R)=1+\frac{1}{R^2}>0$ で、$R>0$ において単調増加。y はすべての実数値をとる。

求める軌跡は、双曲線 $\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ の $x\geqq 2\cos\alpha$ の部分、すなわち右半分である。……(答)