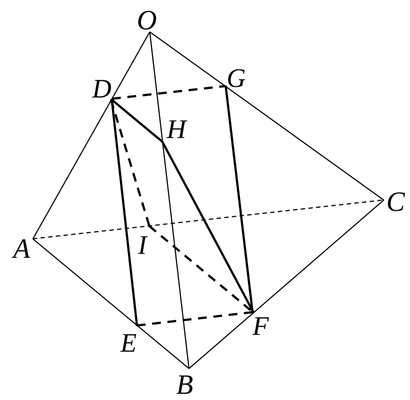
2017年京大理$\boxed{2}$

(1)

$p,\ q,\ r,\ s$ は、1より小さい正の実数とし、$\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BE}=q\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BF}=r\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OG}=s\overrightarrow{OC}$ とすると



$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}=-p\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}$ ——①

$\overrightarrow{OE}=q\overrightarrow{OA}+(1-q)\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OF}=(1-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ であるから

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=-q\overrightarrow{OA}+(q-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ ——②

$\overrightarrow{DG}\ /\!/\ \overrightarrow{EF}$ であるとき、定数 k により、$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{DG}$ と表せるから

$-q\overrightarrow{OA}+(q-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=-kp\overrightarrow{OA}+ks\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、ベクトルの一意性により　$kp=q,\ q-r=0,\ ks=r$　$\therefore q=r$

したがって　$\therefore AE:EB=CF:FB=(1-q):q$　（証明終）
同時に、$q-r=k(p-s)=0$ より、$p=s$ であるから、$AD:DO=CG:GO=(1-p):p$ である。

(2)
$D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I$ が正八面体の頂点となっているとき、(1)における四角形 $DEFG$ は、正方形である。

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DG}$ であるから、$k=1$ であり、$p=q=r=s$ である。

$OD:DA=BE:EA=BF:FC=OG:GC=p:(1-p)$ より　$\overrightarrow{DG}=p(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=p\overrightarrow{AC}$　$\overrightarrow{DE}=(1-p)\overrightarrow{OB}$

同様に、四角形 $DHFI$ を考えると、$OD:DA=CI:IA=CF:FB=OH:HB=p:(1-p)$ が成り立つ。

すると、$BF:FC=p:(1-p)$、$CF:FC=p:(1-p)$ であるから　$p=1-p$　$\therefore p=\dfrac{1}{2}$

$D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I$ は、各辺の中点であることがわかる。

$\overrightarrow{DG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ であり、$|\overrightarrow{DG}|=|\overrightarrow{DH}|=|\overrightarrow{HG}|$ であるから　$\therefore |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

$\overrightarrow{DG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ であり、$|\overrightarrow{DG}|=|\overrightarrow{DE}|$ であるから　$\therefore |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|$

$\overrightarrow{DH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{HF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ であり、$|\overrightarrow{DH}|=|\overrightarrow{HF}|$ であるから　$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OC}|$

$\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{HE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ であり、$|\overrightarrow{HG}|=|\overrightarrow{HE}|$ であるから　$\therefore |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OA}|$

以上により、$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$ であるから、四面体 $OABC$ は正四面体である。（証明終）