2017 年京大理 $\boxed{3}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えてよい。

$\beta=\dfrac{\pi}{4}$、すなわち $q=1$ のとき　$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-p=2$

p は自然数であるから、不適。したがって、$\beta\neq\dfrac{\pi}{4}$、$\tan\beta\neq 1$ であるから

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan2\beta}{1-\tan\alpha\tan2\beta}=2\quad \tan\alpha+\tan2\beta=2-2\tan\alpha\tan2\beta$$

$$\tan\alpha+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=2-2\tan\alpha\cdot\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\quad \tan\alpha(1-\tan^2\beta)+2\tan\beta=2(1-\tan^2\beta)-4\tan\alpha\tan\beta$$

$\tan\alpha=\dfrac{1}{p},\ \tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を代入して

$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{q}=2\left(1-\frac{1}{q^2}\right)-\frac{4}{pq}\quad q^2-1+2pq=2p(q^2-1)-4q\quad 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

$q\geqq 2$ であるから　$q^2-q-1=\left(q-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}>0$　$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5q}{q^2-q-1}\right)$

$f(q)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5q}{q^2-q-1}\right)$ とすると　$f'(q)=\dfrac{5(q^2-q-1)-5q(2q-1)}{2(q^2-q-1)^2}=-\dfrac{5(q^2+1)}{2(q^2-q-1)^2}<0$

$f(q)$ は単調減少である。$f(6)=\dfrac{59}{58}$、$f(7)=\dfrac{38}{41}$ であり、$p\geqq 1$ であるから、$q<6$ でなければならない。

それぞれ調べると　$f(5)=\dfrac{22}{19}$　$f(4)=\dfrac{31}{22}$　$f(3)=2$　$f(2)=\dfrac{11}{2}$

したがって、求める自然数の組は　$\therefore(p,\ q)=(2,\ 3)$ ……(答)

※

$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$ より範囲を絞ってもよい。$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1)$、$q^2-6q-1\leqq 0$ であるから

$$\{q-(3-\sqrt{10})\}\{q-(3+\sqrt{10})\}\leqq 0\quad 6<3+\sqrt{10}<7 \text{ であるから}\quad \therefore 2\leqq q\leqq 6$$