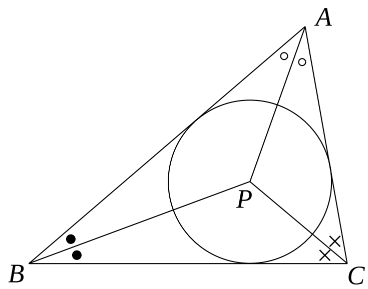
2017年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$\angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$ とすると　$\therefore \beta+\gamma=\pi-\angle A=\dfrac{2}{3}\pi$　$\angle ABP=\angle CBP=\dfrac{\beta}{2},\ \angle ACP=\angle BCP=\dfrac{\gamma}{2}$ であるから

$\angle CBP+\angle BCP=\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \angle BPC=\pi-(\angle CBP+\angle BCP)=\dfrac{2}{3}\pi$　……(答)



(2)

(解答1)　図形的に考える

正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin\angle A}=2\cdot 1$　$BC=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\triangle ABC$が鋭角三角形であるように、点Aが外接円上を動くとき、(1)より、$\angle BPC$も一定である。

点Pは定円上を動く。その円は、$\triangle BCP$の外接円であるから、半径は　$\dfrac{BC}{2\sin\angle BPC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$

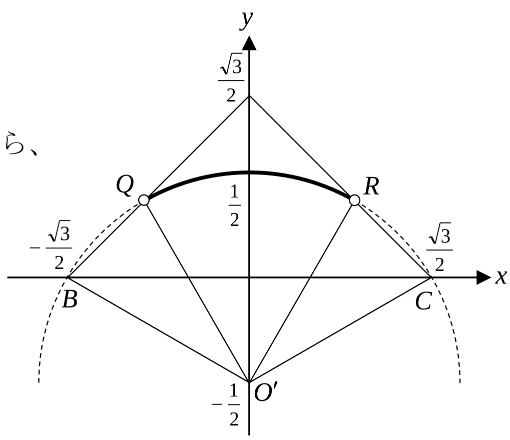
座標平面において、$B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\ C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ とおく。

点Pが動く範囲を、円$x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$の$y>0$の部分とする。$\triangle ABC$の内接円の半径$r$は、点$P$から辺$BC$に下ろした垂線の長さに等しいから、$P$の$y$座標がとり得る範囲を調べればよい。

$\angle B<\dfrac{\pi}{2},\ \angle C<\dfrac{\pi}{2}$ であるから、$\angle CBP<\dfrac{\pi}{4},\ \angle BCP<\dfrac{\pi}{4}$ である。

点Pが動く範囲は、直線$y=x+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=-x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より下側であるから、

図示すると、右図の太線部のようになる。交点$Q,\ R$は含まない。



$\triangle O'BQ$は二等辺三角形で、$\angle O'BQ=75^\circ$であるから、

$\angle BO'Q=\dfrac{\pi}{6}$ であり、対称性から$\angle CO'R=\dfrac{\pi}{6}$

これより、$\angle QO'R=\dfrac{2}{3}\pi-2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ である。

$\angle QO'R$は、y軸によって二等分されるから、$Q,\ R$のy座標は　$\cos\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

yの最大値は$\dfrac{1}{2}$であるから、求める範囲は　$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}<r\leqq\dfrac{1}{2}$　……(答)

（解答 2）　計算で押し切る

$\angle B=\theta$ とおくと、$\angle C=\frac{2}{3}\pi-\theta$ であり、$\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi-\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\therefore \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$

正弦定理より　$\frac{CA}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=2\cdot 1$　$\therefore CA=2\sin\theta,\ AB=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)$

△ ABC の面積から

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CA\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}r(CA+AB+BC)\qquad r=\frac{\sqrt{3}AB\cdot CA}{2(CA+AB+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{2\sin\theta+2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)+\sqrt{3}}$$

ここで

$$2\sin\theta\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=\cos\left\{\theta-\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\right\}-\cos\left\{\theta+\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\right\}=\cos\left\{2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-1\right\}$$

$$\sin\theta+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=2\sin\frac{\theta+\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{2}\cos\frac{\theta-\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{2}=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$t=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ とすると、$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、$-\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}$ であるから、$\frac{\sqrt{3}}{2}<t\leqq 1$ である。

$$r=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(4t^2-1)}{2\sqrt{3}t+\sqrt{3}}=\frac{4t^2-1}{2(2t+1)}=\frac{2t-1}{2}=t-\frac{1}{2}\qquad\therefore\frac{-1+\sqrt{3}}{2}<r\leqq\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

※出題者の意図は、(1)を利用した（解答 1）だと思われる。
（解答 2）は、うまく変形すれば 1 次式に帰着できるが、試験場では大変そう。

2006 年理系後期 $\boxed{4}$ に、類題あり。