2017 年京大理 $\boxed{5}$

$f(x)=xe^{-x}$ とすると　$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$　$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f(x)$ の増減、凹凸は右の通り。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘

$x=1$ において極大値 e^{-1} を持ち、$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において上に凸。

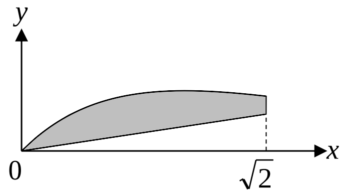
$f'(0)=1$ より、曲線 $y=f(x)$ は、原点において $y=x$ と接する。

a の値で場合分けをする。不定積分 $\int f(x)dx$ を求めておく。

$$\int f(x)dx=\int x(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}+C$$

$0\leqq a\leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において、$y=ax$ は $y=f(x)$ の下側にある。

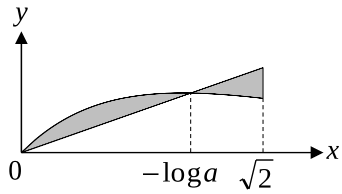


$$S(a)=\int_0^{\sqrt{2}}f(x)dx-a\int_0^{\sqrt{2}}xdx=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^{\sqrt{2}}-a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}=-a-(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}+1$$

$e^{-\sqrt{2}}<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において、$y=ax$ と $y=f(x)$ は 1 点で交差する。

この交点の x 座標を b とすると　$ab=be^{-b}$　$a=e^{-b}$　$b=-\log a$



$$S(a)=\int_0^{-\log a}\{f(x)-ax\}dx+\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}\{ax-f(x)\}dx$$

$$=\left[-(x+1)e^{-x}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{-\log a}+\left[\frac{a}{2}x^2+(x+1)e^{-x}\right]_{-\log a}^{\sqrt{2}}$$

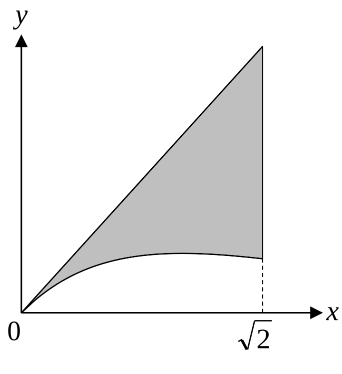
$$=-(-\log a+1)a-\frac{1}{2}a(\log a)^2+1+a+(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}a(\log a)^2-(-\log a+1)a$$

$$=-a\left\{(\log a)^2-2\log a+1\right\}+1+(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}=-a(\log a-1)^2+(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}+1$$

$1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において、$y=ax$ は $y=f(x)$ の上側にある。

$$S(a)=a\int_0^{\sqrt{2}}xdx-\int_0^{\sqrt{2}}f(x)dx=a+(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}-1$$



$S(a)$ は $0\leqq a\leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき単調減少、$1\leqq a$ のとき単調増加。$e^{-\sqrt{2}}<a<1$ のとき

$$S'(a)=-(\log a-1)^2-2a(\log a-1)\cdot\frac{1}{a}=-(\log a)^2+1=(1+\log a)(1-\log a)$$

$-\sqrt{2}<\log a<0$ であるから、$\log a=-1$、$a=e^{-1}$ のとき、

$S'(a)=0$ となる。

$a\geqq 0$ における $S(a)$ の増減は右の通り。最小値は

a	0	$\cdots$	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$S(a)$		↘		↘		↗		↗

$$S(e^{-1})=-4e^{-1}+(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}+1\quad\cdots\cdots(答)$$