2017年京大理 $\boxed{6}$

n 桁の数 X_n が 3 で割り切れるとき、 X_n の各桁の数の和が 3 で割り切れる。
n 桁の数 X_n が 3 で割り切れる確率を、 p_n とする。
$n+1$ 個目の箱を追加してカードを取り出し、 X_n の右端に並べ、 $n+1$ 桁の数 X_{n+1} を作る操作を考える。

X_n が 3 で割り切れるとき　$n+1$ 個目の箱から $\boxed{3}$ を取り出せば、 X_{n+1} が 3 で割り切れる。

X_n を 3 で割った余りが 1 であるとき　$n+1$ 個目の箱から $\boxed{2}$ か $\boxed{5}$ を取り出せば、 X_{n+1} が 3 で割り切れる。

X_n を 3 で割った余りが 2 であるとき　$n+1$ 個目の箱から $\boxed{1}$ か $\boxed{4}$ を取り出せば、 X_{n+1} が 3 で割り切れる。

すなわち、 X_n が 3 で割り切れるとき、確率 $\dfrac{1}{5}$ で X_{n+1} が 3 で割り切れ、 X_n が 3 で割り切れないとき、

確率 $\dfrac{2}{5}$ で X_{n+1} が 3 で割り切れるから、以下の漸化式が成り立つ。

$$\therefore p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n)=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}$$

これより　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$　$p_n-\dfrac{1}{3}=\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)$　$p_1=\dfrac{1}{5}$ であるから

$$p_n-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} \quad \therefore p_n=\frac{1}{3}\left\{1+2\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\right\} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$