2018年京大文 $\boxed{1}$

(1)

$f(x) = |x^2 - 1|, g(x) = x^2 - 2ax + a^2$ とする。条件により、$f'(x_0) = g'(x_0)$ であるから

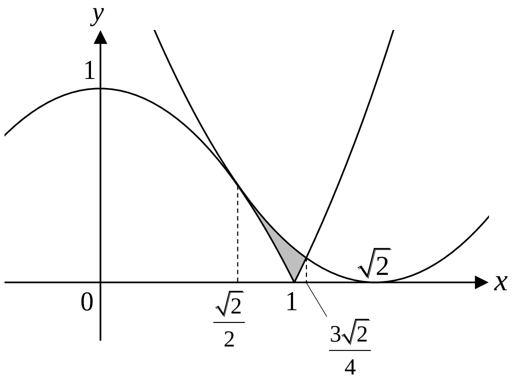
$|x_0| > 1$ とすると　$2x_0 = 2x_0 - 2a$　$a = 0$　$a > 0$ であるから、不適。

$|x_0| < 1$ とすると　$-2x_0 = 2x_0 - 2a$　$4x_0 = 2a$　$\therefore x_0 = \dfrac{a}{2}$

$f(x_0) = g(x_0)$ であるから　$-\dfrac{a^2}{4} + 1 = \dfrac{a^2}{4} - 2a \cdot \dfrac{a}{2} + a^2$　$\dfrac{a^2}{2} = 1$　$a^2 = 2$　$a > 0$ より　$\therefore a = \sqrt{2}$

$x = x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 以外の、$C_1$ と $C_2$ の共有点を調べる。$x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ とすると

$2\sqrt{2}x = 3$　$x = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$




$C_1$ と $C_2$ で囲まれた部分を図示すると、右図の通り。

求める面積は

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left\{ \left(x - \sqrt{2}\right)^2 - (-x^2 + 1) \right\} dx + \int_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \left\{ \left(x - \sqrt{2}\right)^2 - (x^2 - 1) \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) dx + \int_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} (-2\sqrt{2}x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} + \left[-\sqrt{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{5}{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\sqrt{2}}{8} + \sqrt{2} - 3 = \frac{23\sqrt{2}}{24} - \frac{4}{3} \cdots\cdots (答)$$