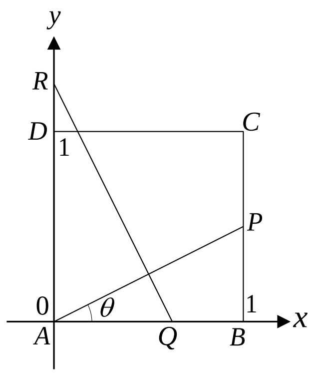
2018年京大文$\boxed{2}$



(1)

座標平面において、$A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$とする。

直線APの式を$y=mx\ (0<m<1)$とすると、$P(1,m)$となる。

APの中点は$\left(\frac{1}{2},\frac{m}{2}\right)$であるから、$AP$の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{m}{2}=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{1+m^2}{2}\right)$$

Q,Rはそれぞれx軸、y軸との交点であるから　$\therefore Q\left(\frac{1+m^2}{2},0\right), R\left(0,\frac{1+m^2}{2m}\right)$

$$\therefore QR^2=AQ^2+AR^2=\left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)=\frac{(1+m^2)^3}{4m^2}\qquad \therefore QR=\frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{2m}$$

ここで、$\angle BAP=\theta$とすると、$m=\tan\theta$であるから

$$1+m^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad \therefore QR=\frac{1}{2\tan\theta\cos^3\theta}=\frac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sin\theta\,(1-\sin^2\theta)}$$

以上により　$\therefore QR=\dfrac{1}{2\sin\angle BAP\,(1-\sin^2\angle BAP)}$ ……(答)

(2)

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$であるから、$0<\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$である。

$f(t)=2t(1-t^2)$として、$0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$の範囲で増減を調べる。　$f'(t)=2(1-3t^2)=6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)$

増減は右の通りで、$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$において極大となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

QRは$f(t)$が最大のとき最小となるから、求める最小値は

$\therefore \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ……(答)